

Diferencijalni i integralni račun 2 2018/2019

1 Integralni račun

1. Određeni integral. Definicija i geometrijski smisao. Rimanove sume. Odrediti integralnu sumu funkcije $f(x) = c$.
2. Ako je funkcija integrabilna na $[a, b]$, tada je i ograničena na $[a, b]$. Dokazati!
3. Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, tada je integrabilna na $[a, b]$. Dokazati!
4. Osobine određenog integrala (linearnost, aditivnost,...). Navesti i dokazati!
5. Formulisati i dokazati teoremu o srednjoj vrijednosti integralnog računa. Formulisati i dokazati Njutn-Lajbnicovu formulu.
6. Smjena promjenljive i parcijalna integracija za određeni integral. Naći $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.
7. Kriterijumi konvergencije kod nesvojstvenog integrala I vrste. Ispitati konvergenciju integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[5]{x^3 + 1}}$.
8. Nesvojstveni integral II vrste. Izračunati integral $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x}$, $p \in \mathbb{R}$.
9. Primjene određenog integrala u geometriji, površina figure u ravni.
10. Primjene određenog integrala u geometriji, dužina luka krive.
11. Primjene određenog integrala u geometriji, zapremina i površina obrtnog tijela.

2 Numerički redovi

12. Definicija numeričkog reda. Parcijalne sume. Konvergencija. Potreban uslov za konvergenciju reda. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
13. Poredbeni kriterijumi konvergencije. Formulacije i dokazi.
14. Integralni kriterijum, formulacija. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
15. Dalamberov kriterijum, formulacija i dokaz. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.
16. Košijev kriterijum, formulacija i dokaz. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n^2}$.
17. Dirihielov kriterijum, Abelov kriterijum formulacije. Alternativni redovi. Lajbnicov kriterijum, formulacija i dokaz.
18. Apsolutna i uslovna konvergencija redova. Ispitati apsolutnu i običnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $p > 0$.

3 Stepeni redovi

19. Definisati funkcionalni red i stepeni red.
20. Definisati poluprečnik konvergencije stepenog reda. Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima za red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n}(x+1)^n$.
21. Odrediti poluprečnik konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.
22. Odrediti poluprečnik konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

4 Furijeovi redovi

23. Definisati trigonometrijski sistem i pokazati da je ortogonalan na intervalu $[-\pi, \pi]$. Definisati trigonometrijski red.
24. Definisati Furijeov red i navesti Ojler-Furijeove formule (navesti i za parne i neparne funkcije) na intervalu $[-\pi, \pi]$.
25. Formulisati Dirihielovu teoremu i Parsevalovu teoremu. Funkciju $f(x) = \pi^2 - x^2$ razviti u Furijeov red na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa na osnovu dobijenog razvoja izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

5 Diferencijalne jednačine

26. Definisati: diferencijalnu jednačinu, opšte, partikularno i singularno rješenje.
27. Jednačina sa razdvojenim promjenljivim. Odrediti krivu u ravni O_{xy} čije sve tangente prolaze kroz koordinatni početak.
28. Definisati homogenu diferencijalnu jednačinu i opisati postupak za nalaženje opštег rješenja. Riješiti diferencijalnu jednačinu $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{-x+y+1}$.
29. Definisati linearu diferencijalnu jednačinu prvog reda i opisati postupak za nalaženje opštег rješenja. Riješiti jednačinu $y' + 2xy = e^{-x^2}$.
30. Definisati Bernulijevu diferencijalnu jednačinu i opisati postupak za nalaženje opštег rješenja. Riješiti jednačinu $y' + 2y = e^x y^2$.
31. Definisati Rikitijevu diferencijalnu jednačinu i opisati postupak za nalaženje opštег rješenja. Riješiti jednačinu $y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$, ako je njeno partikularno rješenje $y_1 = e^x$.
32. Homogena linearna diferencijalna jednačina reda n sa konstantnim koeficijentima, definicija i postupak nalaženja opštег rješenja. Riješiti jednačinu $y'' + 4y' + 3y = 0$.
33. Nehomogena linearna diferencijalna jednačina reda n sa konstantnim koeficijentima, definicija i postupak nalaženja opštег rješenja. Riješiti jednačinu $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x$.
34. Metod varijacije konstante. Riješiti jednačinu $y'' + y = \sin x$.

6 Funkcije više promjenljivih

35. Definisati realnu funkciju od n promjenljivih i njenu graničnu vrijednost. Odrediti $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.
36. Neprekidnost funkcije više promjenljivih. Definisati parcijalne izvode prvog i drugog reda. Naći parcijalne izvode prvog i dugog reda za funkciju $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.
37. Definisati diferencijabilnost funkcije više promjenljivih. Pokazati da ako je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ diferencijabilna u tački $X_0 \in D$, tada je neprekidna u X_0 .

7 Ekstremi funkcija više promjenljivih

38. Definisati lokalne ekstreme realne funkcije od n promjenljivih. Formulisati i dokazati potreban uslov za lokalne ekstreme. Definisati stacionarne tačke. Odrediti stacionarne tačke funkcije $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$.
39. Navesti dovoljne uslove za lokalne ekstreme. Odrediti ekstreme funkcije $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$.
40. Uslovni ekstremi funkcije dvije promjenljive. Odrediti ekstreme funkcije $f(x, y) = xy$ pod uslovom $x^2 + y^2 = 2$.

8 Dvojni i trojni integral

41. Definicija dvojnog integrala i osobine. Zapremina i površina.
42. Određivanje dvojnog integrala. Izračunati zapreminu tijela određenog ravnima

$$z = 0, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad y = 2 - x, \quad y = 4 - x$$

i površi $z = x^2 + y^2$.

43. Smjena promjenljivih u dvojnom integralu. Polarne i uopštene polarne koordinate. Izračunati integral $\int \int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{5}{2}} dx dy$ gdje je $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.
44. Definisati masu ploče gustine $\sigma(x, y)$ i momente ploče oko O_x i O_y osa. Odrediti tešište polukružne ploče čija je gustina jednaka udaljenosti od centra kružnice $x^2 + y^2 = a^2$.
45. Trojni integral, cilindrične i sferne koordinate. Odrediti zapreminu lopte $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.