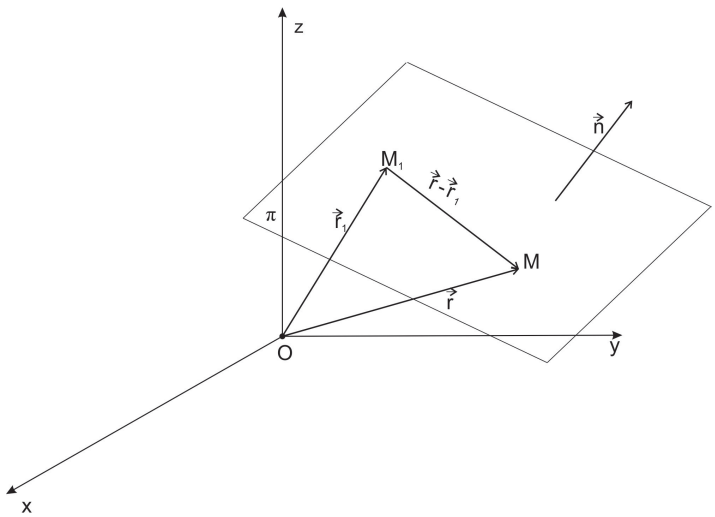
Glava 1

Analitička geometrija u prostoru

Studenti su se sa pojmom analitička geometrija susreli prvi put u srednjoj školi, gdje su naučili osnovne pojmove iz analitičke geometrije u ravni. U ovom poglavlju cemo se upoznati sa osnovnim elementima analitičke geometrije u prostoru, tačkom, pravom i ravni i njihovim međusobnim odnosima.

1.1 Ravan



Slika 1.1: Ravan u prostoru

Razni oblici jednačine ravni

U prostornom Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu ravan je pot-

puno određena jednom datom tačkom i vektorom normale na tu ravan. Neka je data tačka $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektor $\vec{n} = (A, B, C)$. Kroz datu tačku normalno na dati vektor $\vec{n}$ možemo postaviti tačno jednu ravan slika 1.1.
Neka su $\vec{r} = \vec{OM} = (x, y, z)$, $\vec{r_1} = \vec{OM_1} = (x_1, y_2, z_1)$ vektori položaja tačaka M i M_1. Vektor $\vec{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Vektor $\vec{n}$ je okomit na $\vec{r} - \vec{r_1}$ pa na osnovu osobina skalarnog proizvoda vektora vrijedi $(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} = 0$.

Jednačina

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{1.1.1}$$

predstavlja **vektorski oblik jednačine ravni**.
Iz jednačine (1.1.1) je $\vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{r_1} \cdot \vec{n} = 0$ ili $\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0$ gdje je $D = -\vec{r_1} \cdot \vec{n}$.
Uvrštavanjem koordinata vektora $\vec{r} - \vec{r_1}$ i $\vec{n}$ u jednačinu (1.1.1) dobijamo **skalarni oblik jednačine ravni**.

$$A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) + C \cdot (z - z_1) = 0 \tag{1.1.2}$$

ili

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \tag{1.1.3}$$

gdje je $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$.
Jednačina (1.1.3) naziva se još i **opšta skalarna jednačina ravni**.

Primjer 1.1.1. Date su tačke $M_1(0, -1, 3)$ i $M_2(1, 3, 5)$. Napisati u vektorskom i skalarnom obliku jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku M_1 i normalna je na vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Rješenje. Vektor normale tražene ravni je $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1, 4, 2)$, a vektor položaja tačke M_1 je $\vec{r_1} = (0, -1, 3)$.
Vektorski oblik jednačine ravni je:

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{tj.}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{r_1} \cdot \vec{n} = 0$$

Uvrštavanjem koordinata vektora $\vec{n}$ i $\vec{r_1}$ u posljednju jednačinu dobijamo:

$$\vec{r} \cdot (\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) - (-\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) = 0$$

a nakon sređivanja jednačinu ravni u **vektorskom obliku**:

$$\vec{r} \cdot (\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) - 2 = 0$$

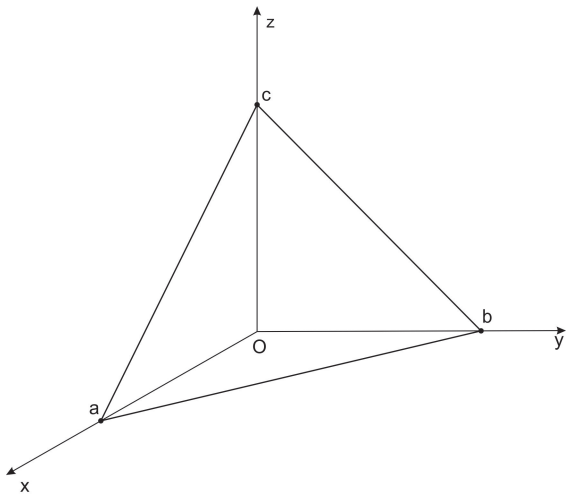
Ako u jednačinu ravni u vektorskom obliku umjesto vektora $\vec{r}$ uvrstimo njegove koordinate (x, y, z) tj. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, nakon sređivanja dobijamo jednačinu ravni u **skalarnom obliku** : $x + 4y + 2z - 2 = 0$.
Jednačinu ravni u skalarnom obliku možemo dobiti i direktno uvrštavanjem koordinata vektora $\vec{n} = (1, 4, 2)$ i tačke $M_1(0, -1, 3)$ u jednačinu (1.1):

$$1 \cdot (x - 0) + 4 \cdot (y + 1) + 2(z - 3) = 0$$

odnosno

$$x + 4y + 2z - 2 = 0.$$

Segmentni oblik jednačine ravni



Slika 1.2:

Posmatrajmo ravan α : $Ax + By + Cz + D = 0$ i pretpostavimo da su svi koeficijenti A ,B ,C i D različiti od nule. Proizvoljna tačka P na x-osi ima koordinate $(a, 0, 0)$, gdje je a realan broj. Tačka P pripada ravni α ako i samo ako je

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0$$

odnosno ako je

$$a = -\frac{D}{A}$$

Veličina a se naziva odsječak ili segment ravni α na osi x. Analogno dobijamo odsječke b i c iste ravni na osama y i z.

$$b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C} \ .$$

Ako izrazimo koeficijente A,B i C pomoću a, b, c i D dobićemo jednačinu ravni u obliku

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

Kako je po pretpostavci D različito od nula, dijeljenjem posljednje jednačine sa D dobijamo jednačinu:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{1.1.4}$$

Ovaj oblik jednačine naziva se **segmentni oblik jednačine ravni.**

Primjer 1.1.2. Predstaviti jednačinu ravni iz primjera 1 u segmentnom obliku.

Rješenje. Jednačina ravni u opštem skalarnom obliku je glasila

$$x + 4y + 2z - 2 = 0$$

Prvi način je da odredimo odsječke a, b i c na koordinatnim osama.
Stavljajući $y = z = 0$ u jednačinu ravni, dobijamo odsječak ravni na x osi $x = 2$ tj. $a = 2$. Analogno, za $x = z = 0$ dobijamo odsječak na y osi $4y - 2 = \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$ tj. $b = \frac{1}{2}$, a za $x = y = 0$ odsječak na z osi $c = 1$. Uvrštavanjem ovih odjsečaka u jednačinu (1.1.4)dobijamo jednačinu ravni u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{2} + \frac{z}{\frac{1}{2}} + z = 1$$

Drugi način je da cijelu jednačinu podijelimo sa $-D$ tj. u našem slučaju sa 2.

$$\frac{x}{2} + \frac{4y}{2} + z = 1$$

a nakon sređivanja dobijamo traženu jednačinu ravni u segmentnom obliku

$$\frac{x}{2} + \frac{z}{\frac{1}{2}} + z = 1$$

Neki posebni slučajevi jednačine ravni

U izvođenju segmentnog oblika jednačine ravni pretpostavili smo da u su u jednačini $Ax + By + Cz + D = 0$ svi koeficijenti A,B,C, i D različiti od nule. Sada ćemo posmatrati slučajeve kada je neki od navedenih koeficijenata nula.

a) Ako je $D = 0$ u tom slučaju jednačina ravni u vektorskom obliku je $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ tj. vektori položaja svih tačaka u ravni su normalni na vektor $\vec{n}$. Sve takve ravni prolaze i kroz koordinatni početak.

b) Ako je $A = 0$ tada je $\vec{n} = B\vec{j} + C\vec{k}$, te je vektor $\vec{n}$ komplanaran sa vektorima $\vec{j}$ i $\vec{k}$, odnosno normalan na osu Ox, pa je ravan paralelna sa osom Ox
.
Analogno zaključujemo da je i za $B = 0$ ravan paralelna sa osom Oy, a za $C = 0$ sa osom Oz.

c) Ako je $D = 0$ i jedan od koeficijenata A, B ili C nula razlikujemo slučajeve: c.1) Ako je $D = 0$ i $A = 0$ jednačina ravni ima oblik $By+Cz = 0$. Znači ravan prolazi kroz koordinatni početak i paralelna je osi Ox, što znači da sadrži osu Ox.
c.2) Ako je $D = 0$ i $B = 0$ ravan prolazi kroz osu Oy.
c.3) Ako je $D = 0$ i $C = 0$ ravan prolazi kroz osu Oz.

d) Ako su dva od koeficijenata A,B,C jednaki nuli razlikujemo sljedeće slučajeve:
d.1) Za $A = B = 0$ jednačina ravni ima oblik $Cz + D = 0$ pa je ravan paralelna sa ravni xOy
d.2) Za $A = C = 0$ ravan je paralelna sa ravni xOz
d.3) Za $B = C = 0$ ravan je paralelna sa ravni yOz

e) Ako su tri koeficijenta nula imamo slučajeve: e.1) Za $A = B = D = 0$ ravan se poklapa sa ravni xOy
e.2) Za $A = C = D = 0$ ravan se poklapa sa ravni xOz
e.3) Za $B = C = D = 0$ ravan se poklapa sa ravni yOz
Slučaj $A = B = C = 0$ nije moguć, jer bi ravan $D = 0$ morala da bude paralelna sa sve tri ose.

Primjer 1.1.3. Napisati jednačine koordinatnih ravni.

Rješenje: Za vektor normale ravni xOy možemo uzeti jedinični vektor ose z tj. vektor $\vec{k} = (0, 0, 1)$ i tačku $O(0, 0, 0)$ koja leži u toj ravni. Uvrštavanjem koordinata vektora $\vec{k}$ i tačke O u skalarni oblik jednačine ravni dobijamo da

je jednačina ravni xOy: $z = 0$. Analogno, dobijamo i jednačine druge dvije koordinantne ravni. Jednačina ravni xOz je $y = 0$, a ravni yOz je $x = 0$.

Primjer 1.1.4. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz z osu i tačku $M(2, 1, 1)$.

Rješenje: S obzirom da tražena ravan prolazi kroz z osu na osnovu c.3) zaključujemo da su koeficijenti D i C jednaki nuli tj. vektor normale leži u ravni xOy, pa jednačina ravni ima oblik $Ax + By = 0 \quad (1)$
Ako u ovu jednačinu uvrstimo koordinate date tačke M dobijamo jednačinu $2A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = -2A$.
Uvrštavajući B u jednačinu (1) dobijamo jednačinu $Ax + 2Ay = 0$ odakle dijeljenjem sa A dobijamo jednačinu ravni u skalarnom obliku: $x - 2y = 0$.

Jednačina pramena (snopa) ravni kroz presječnu pravu dvije ravni

Znamo da se kroz jednu tačku može provući beskonačno mnogo pravih. Isto tako kroz jednu pravu se može postaviti beskonačno mnogo ravni. Dakle, **pramen (snop) ravni** koji je određen datom pravom je skup svih ravni koje prolaze kroz tu pravu. Ta prava se zove **osa pramena**.

Theorem 1.1.5. *Neka su date dvije ravni*

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad i \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

čiji vektori normala $\overrightarrow{n_\alpha} = (A_1, B_1, C_1)$ *i* $\overrightarrow{n_\beta} = (A_2, B_2, C_2)$ *nisu kolinearni i neka je p presječna prava datih ravni.*
Skup svih ravni koje prolaze kroz pravu p, osim ravni β*, zove se* ***pramen ravni*** *i jednačina tog pramena ravni je:*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

gdje je λ *realni parametar.*

Primjer 1.1.6. . Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 5, 3)$ i presjek ravni $\alpha : \; 3x - y - z - 5 = 0 \quad \text{i} \quad \beta : x + 2z = 0$.

Rješenje: Tražena ravan pripada pramenu ravni koji je određen ravnima α i β. Jednačina tog pramena je:

$$3x - y - z - 5 + \lambda(x + 2z) = 0$$

gdje je λ realni parametar.
U ovu jednačinu uvrštavamo koordinate tačke M_1, nakon čega dobijamo jednačinu:

$$6 - 5 + 3 - 5 + \lambda(2 - 6) = 0$$

odakle izračunamo parametar $\lambda = -\frac{1}{4}$. Sada parametar λ ponovo uvrstimo (vratimo) u jednačinu pramena i nakon sređivanja dobijamo jednačinu tražene ravni u skalarnom obliku:

$$11x - 4y - 6z - 20 = 0$$

.

Primjer 1.1.7. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M(2, -1, 1)$ i normalna je na ravnima $\alpha: \ 3x + 2y - z + 4 = 0$ i $\beta: x + y + z - 3 = 0$.

Rješenje. Da bi odredili jednačinu ravni u skalarnom obliku potrebna nam je jedna tačka kroz koju ta ravan prolazi i vektor normale tražene ravni. Tačku imamo , to je data tačka M, ostaje nam još da odredimo vektor normale. S obzirom da tražena ravan mora biti normalna na date ravni to znači da će i vektor normale te ravni biti okomit na vektore normala ravni α i β. Dakle, traženi vektor $\vec{n}$ je okomit i na $\overrightarrow{n_\alpha}$ i na $\overrightarrow{n_\beta}$ pa je $\vec{n} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}$. Iz jednačina datih ravni odredimo vektore normala $\overrightarrow{n_\alpha} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{n_\beta} = (1, 1, 1)$, pa je:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

Uvrštavanjem koordinata vektora $\vec{n}$ i date tačke M u skalarni oblik jednačine ravni dobijamo:

$$3(x - 2) - 4(y + 1) + 1(z - 1) = 0$$

Nakon sređivanja dobijamo jednačinu tražene ravni:

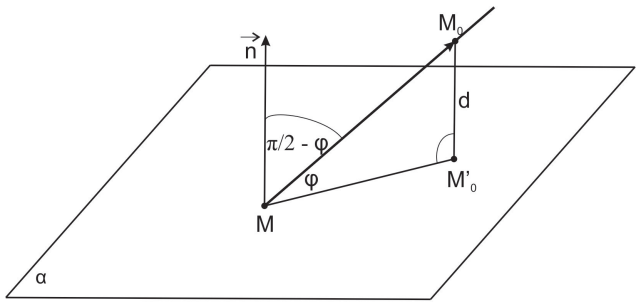
$$\alpha : 3x - 4y + z - 11 = 0$$

Jednačina ravni kroz tri tačke

Ravan je potpuno određena sa tri različite nekolinearne tačke. Pokazaćemo kako se određuje jednačina ravni kroz tri nekolinearne tačke.
Neka su date tri različite nekolinearne tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ i neka je $M(x, y, z)$ bilo koja tačka koja će pripadati toj ravni. Ako leže u istoj ravni tačke M, M_1, M_2 *i* M_3 su komplanarne pa mora vrijediti:
$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, a to je mješoviti proizvod vektora, pa se jednačina ravni kroz tri tačke se određuje iz jednačine:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.1.5}$$

Udaljenost tačke od ravni



Slika 1.3: Udaljenost tačke od ravni

Neka je data ravan $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$ i tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ koja ne pripada toj ravni. Treba odrediti udaljenost date tačke od ravni α.

Neka je M_0' ortogonalna projekcija tačke M_0 na ravan α. Sa slike 1.3 uočavamo da je trougao MM_0M_0' pravougli. Tačka $M(x_1,y_1,z_1)$ je tačka u ravni α kojom je ta ravan i određena, a vektor $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale date ravni.
Iz pravuglog trougla MM_0M_0' vrijedi $d=|\overrightarrow{MM_0}|\cdot\ sin\varphi$.
Iz definicije skalarnog prozvoda dva vektora imamo da je
$\cos(90^0-\varphi)=\dfrac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{MM_0}|\cdot|\vec{n}|}$, tj. $\sin\varphi==\dfrac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{MM_0}|\cdot|\vec{n}|}$ Uvrštavanjem $\sin\varphi$ u obrazac za d, dobijamo

$$d=|\overrightarrow{MM_0}|\cdot\frac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{MM_0}|\cdot|\vec{n}|},\text{ a nakon skraćivanja } d=\frac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Uvrštavajući koordinate vektora $\overrightarrow{MM_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$ i $\vec{n}=(A,B,C)$ u posljednji obrazac za d dobićemo:

$$d=\frac{A\cdot(x_0-x_1)+B\cdot(y_0-y_1)+C\cdot(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Znamo od ranije da je $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$, pa nakon sređivanja dobijamo

$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

odnosno

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{1.1.6}$$

jer mora vrijediti $d\geq 0$.
Jednačina (1.1.6) predstavlja obrazac za izračunavanje udaljenosti tačke od

ravni.

Primjer 1.1.8. Odrediti jednačinu ravni koja je određena sa tri tačke $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,2)$ i $M_3(1,1,4)$. Zatim odrediti udaljenost tačke $P(2,3,5)$ od te ravni.

Rješenje: Uvrštavajući koordinate datih tačaka u jednačinu (1.1.5), nakon izračunavanja determinante, dobijamo jednačinu ravni α: $4x - 2y + 2z - 10 = 0$. Vektor normale ove ravni je $\vec{n} = (4,-2,2)$. Koristeći obrazac za udaljenost tačke od ravni 1.1.6 dobijamo:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ugao između dvije ravni

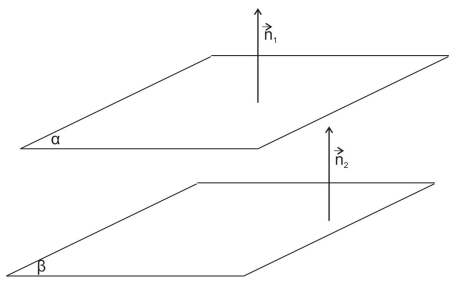
Ugao između dvije ravni određuje se pomoću njihovih vektora normala. Ako su date dvije ravni

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \;\; i \;\; \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

vektori normala ovih ravni su: $\overrightarrow{n_\alpha} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_\beta} = (A_2, B_2, C_2)$ pa je kosinus ugla između ovih vektora $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}$. S obzirom da kosinus ugla možemo dobiti sa znakom i pozitivan i negativan, što zavisi od smjerova vektora $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$, da bi odredili ugao između ravni koji nije tup, pisaćemo:

$$\cos\varphi = \left| \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|} \right| \tag{1.1.7}$$

Uzajamni položaj dvije ravni



Slika 1.4: Paralelne ravni

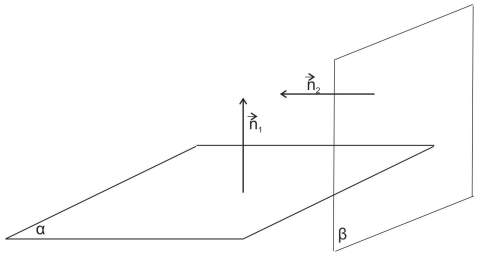
Ako su ravni α i β paralelne, tada su i njihovi vektori normala paralelni, pa je njihov vektorski proizvod nula tj. $\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \vec{0}$. To znači da su ovi vektori kolinearni, pa postoji realan parametar λ takav da je $\vec{n_\alpha} = \lambda \cdot \vec{n_\beta}$. Nakon uvrštavanja kooordinata vektora $\vec{n_\alpha}$ i $\vec{n_\beta}$ dobijamo:

$$A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k} = \lambda A_2\vec{i} + \lambda B_2\vec{j} + \lambda C_2\vec{k}$$

Odavde zaključujemo da mora vrijediti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{1.1.8}$$

Jednačina 1.1.8 predstavlja ***uslov paralelnosti dvije ravni***.



Slika 1.5: Normalne ravni

Analogno prethodnom razmatranju, zaključujemo da su dvije ravni međusobno okomite ako su im vektori normala okomiti, pa vrijedi: $\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = 0$ odakle dobijamo ***uslov normalnosti (okomitosti) dvije ravni*** :

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{1.1.9}$$

Primjer 1.1.9. Odrediti rastojanje između dvije paralelne ravni:
$\alpha: \ 2x + 3y - 6z + 14 = 0$ i $\beta: 2x + 3y - 6z - 35 = 0$.

Rješenje. Ovo su dvije paralelne ravni čiji je vektor normale $\vec{n} = (2, 3, -6)$. Izaberimo proizvoljnu tačku $A \in \alpha$, na primjer uzećemo proizvoljne koordinate $y = 0$ i $z = 0$, pa uvrstiti u jednačinu ravni α odakle dobijamo koordinatu $x = -7$. Dakle, tačka $A(-7, 0, 0)$ pripada ravni α. Koristeći obrazac 1.1.6 za izračunavanje udaljenosti tačke od ravni izračunamo udaljenost tačke A od ravni β :

$$d = \frac{|2 \cdot (-7) + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{4^2 + 9^2 + 6^2}} = 7$$

Primjer 1.1.10. Naći ugao između ravni:
$\alpha: \ x + 2z - 6 = 0$ i $\beta: x + 2y - 4 = 0$.

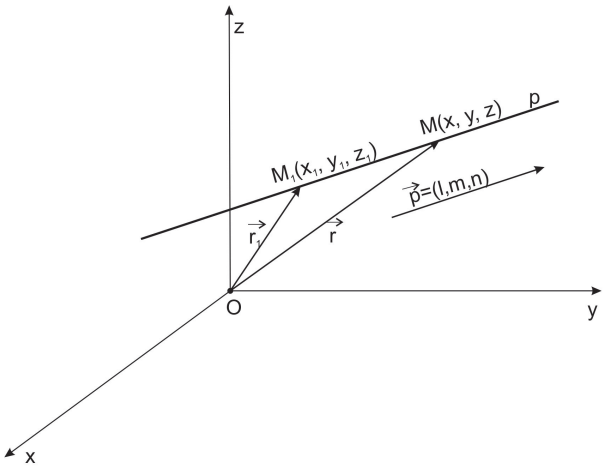
Rješenje. Iz jednačina datih ravni odredimo vektore normala $\vec{n_\alpha} = (1, 0, 2)$, $\vec{n_\beta} = (1, 2, 0)$, pa koristeći 1.1.7 dobijamo veličinu ugla između datih ravni:

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|} \right| = \frac{1}{5}, \text{ pa je}$$
$$\varphi = \arccos\frac{1}{5}$$

.

1.2 Prava

Položaj prave u prostoru može biti određen na više načina: sa dvije date tačke ili kao presjek dvije ravni, tačkom i uslovom normalnosti ili paralelnosti sa drugom pravom. Odatle slijedi da jednačinu prave možemo napisati u raznim oblicima.



Slika 1.6: Prava u prostoru

Vektorska jednačina prave

Neka prava prolazi kroz datu tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i paralelna je vektoru $\vec{p} = (l, m, n)$, a $M(x, y, z)$ je proizvoljna tačka prave.
Zbog kolinearnosti vektora $\overrightarrow{M_1M}$ i $\vec{p}$ vrijedi $\overrightarrow{M_1M} \times \vec{p} = \vec{0}$ odnosno,

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \times \vec{p} = 0 \tag{1.2.1}$$

Jednačina (1.2.1) predstavlja *vektorski oblik jednačine prave.* Očigledno je da sve tačke prave p zadovoljavaju jednačinu (1.2.1). Jednačinu 1.2.1 možemo napisati i u sljedećem obliku: $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{q}$, gdje je $\vec{q} = \vec{r_1} \times \vec{p}$.

Parametarske jednačine prave

Iz vektorske jednačine prave i činjenice da su vektori $\overrightarrow{M_1M}$ i $\vec{p}$ kolinearni uvrštavanjem koordinata ovih vektora dobijamo:

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = t(l \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j} + n \cdot \vec{k})$$

a odavde je

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t \cdot l \\ y &= y_1 + t \cdot m \\ z &= z_1 + t \cdot n \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Parametar t je iz skupa realnih brojeva, pa jednačine (1.2.2) daju koordinate svih tačaka date prave.
Jednačine (1.2.2) se nazivaju *parametarske jednačine prave.*

Kanonske jednačine prave

Ako pretpostavimo da su koordinate vektora $\vec{p} = (l, m, n)$ različite od nula, iz jednačine 1.2.2 izrazimo parametar t:

$$t = \frac{x - x_1}{l}, \quad t = \frac{y - y_1}{m}, \quad t = \frac{z - z_1}{n}$$

A odavde je

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{1.2.3}$$

Jednačine 1.2.3 se nazivaju *kanonske jednačine prave* ili jednačine prave u kanonskom obliku.

Primjer 1.2.1. Napisati kanonske i parametarske jednačine prave. Prava prolazi kroz tačku $M_1(5, 1, 2)$ i paralelna je vektoru $\vec{p} = (-1, 3, 2)$.

Rješenje. Uvrštavanjem koordinata date tačke M_1 i datog vektora $\vec{p}$ u jednačinu (1.2.3) dobijamo kanonske jednačine prave:

$$\frac{x - 5}{-1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 2}{2}$$

Odavde lako dobijemo parametarske jednačine prave p:

$$\begin{aligned} x &= 5 - t \\ y &= 1 + 3t \\ z &= 2 + 2t \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Jednačina prave kroz dvije date tačke

Poznato nam je da je prava jednoznačno određena sa dvije različite tačke. Neka su date dvije tačke u prostoru $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Vektor pravca ove prave je $\vec{p} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ako u kanonski oblik jednačina prave (1.2.3) uvrstimo koordinate vektora pravca i koordinate date tačke M_1 dobijamo jednačine prave kroz dvije date tačke u kanonskom obliku:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{1.2.5}$$

Prava kao presjek dvije ravni

Svaka prava u prostoru može se zadati kao presjek dvije različite neparalelne ravni:

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \beta\colon\ & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Primjer 1.2.2. Napisati u kanonskom obliku jednačinu prave:

$$\begin{gathered} 2x - 3y - 3z - 9 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{gathered}$$

Rješenje. Prava leži u obe date ravni pa je vektor pravca $\vec{p}$ ove prave okomit na vektore normala datih ravni. Dakle,vektor pravca ove prave možemo odrediti kao vektorski proizvod vektora normala ovih ravni.

$$\vec{p} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\vec{p} = (-9, -5, -1)$$

Ostaje još da odredimo jednu tačku koja leži u obe date ravni. Date jednačine ravni napisaćemo u sljedećem obliku:

$$\begin{gathered} 2x - 3y = 3z + 9 = 0 \\ x - 2y = -(z + 3) \end{gathered}$$

Trebamo riješiti gornji sistem jednačina. Ovaj sistem je neodređen, pa možemo uzeti jednu koordinatu proizvoljnu, npr. $z = -3$, pa nakon uvrštavanja u sistem dobijamo $x = 0$ i $y = 0$. Tako smo dobili tačku koja leži u obe date ravni, pa mora pripadati pravoj p. To je tačka $M(0, 0, -3)$.
Jednačine prave p u kanonskom obliku glase:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$$

Ugao između dvije prave

Ugao između dvije prave u prostoru je ugao između bilo koja dva vektora koji leže na datim pravama, odnosno između njihovih vektora pravaca. Pod uglom između dvije prave podrazumijevaćemo ugao koji je oštar ili prav. Neka su date dvije prave p_1 i p_2 i neka su vektori $\vec{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$ i $\vec{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ vektori pravaca ovih pravih. Tada je:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{p_1} \cdot \vec{p_2}}{|\vec{p_1}| \cdot |\vec{p_2}|} \right| \tag{1.2.6}$$

Jednačinom 1.2.6 definisan je kosinus ugla između dvije prave koje se sijeku.

Ako su prave međusobno okomite tada je $\vec{p_1} \perp \vec{p_2}$, pa je $\vec{p_1} \cdot \vec{p_2}$, odnosno

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \tag{1.2.7}$$

Jednačina 1.2.7 je *uslov normalnosti dvije prave.* Ako su dvije prave paralelne tada su i vektori pravaca p_1 i p_2 paralelni, pa je $\vec{p_1} \times \vec{p_2} = 0$ ili

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{1.2.8}$$

Jednačina 1.2.8 je *uslov paralelnosti dvije prave.*

Primjer 1.2.3. Odrediti jednačinu prave q koja prolazi kroz tačku $M(1, -2, 3)$ i paralelna je pravoj p : $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, a zatim odrediti ugao između prave q i prave r: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{5}$.

Rješenje. S obzirom da su prave p i q paralelne, za vektor pravca prave q možemo uzeti vektor pravca prave p, pa je $\vec{q} = (2, 1, 2)$. Jednačina tražene prave q glasi:

$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

Uvrštavanjem koordinata vektora pravaca prave q i r u jednačinu 1.2.6 dobijamo kosinus ugla između ove dvije prave:

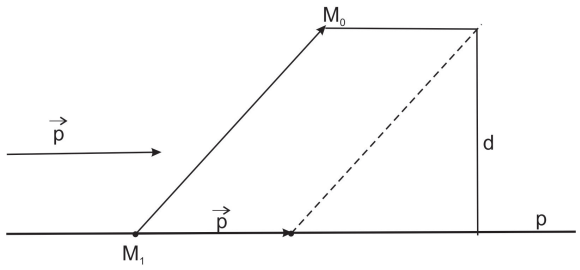
$$\cos\alpha = \left| \frac{(2,1,2) \cdot (3,4,5)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{3^2+4^2+5^2}} \right|$$

Nakon sređivanja

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Rastojanje tačke od prave

Neka je data tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i prava p: $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$. Potrebno je izračunati najkraće rastojanje date tačke od date prave.
Sa slike 1.2 vidimo je rastojanje tačke M_0 od prave p zapravo visina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p}$ i $\overrightarrow{M_1M_0}$. Tačka M_1 je tačka na pravoj p. Od ranije nam je poznato da je površina paralelograma konstruisanog nad dva vektora intenzitet vektorskog proizvoda ta dva vektora, pa je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p}$ i $\overrightarrow{M_1M_0}$ jednaka $\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{p}\right|$. Takođe površina paralelograma je $|\vec{p}| \cdot d$. Dakle, vrijedi:



Slika 1.7: Rastojanje tačke od prave

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{p}\right| = |\vec{p}| \cdot d$$

Odavde je

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{p}\right|}{|\vec{p}|} \tag{1.2.9}$$

Jednačina 1.2.9 predstavlja obrazac za izračunavanje *najkraćeg rastojanja tačke od prave.*

Primjer 1.2.4. Naći rastojanje između dvije paralelne prave:
$p: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$ i $q: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Rješenje. Iz jednačina datih pravih vidimo da imamo dvije tačke: $M_0(0,1,0) \in p_1$ i $M_1(1,0,1) \in p_2$. Rastojanje između ove dvije prave izračunaćemo kao rastojanje tačke jedne prave od druge prave. Na primjer, naći ćemo udaljenost tačke M_0 od prave p_2.
Vektor $\overrightarrow{M_1M_0} = (1,-1,1)$, a vektor pravca prave p_2 je $p_2 = (1,1,2)$. Računamo:

$$\vec{p_2} \times \overrightarrow{M_1M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{p_2} \times \overrightarrow{M_1M_0} = (3,1,2)$$

$$\left|\vec{p_2} \times \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \sqrt{14}, \quad |\vec{p_2}| = \sqrt{6}$$

Nakon uvrštavanja dobijenih vrijednosti u obrazac 1.2.9 dobijamo najkraće rastojanje tačke M_0 od prave p_2, tj. rastojanje između dvije date paralelne prave.

$$d = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Uslov presjeka dvije prave i nalaženje presječne tačke

Neka su date dvije prave p_1 i p_2 određene svojim vektorima pravaca $\vec{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$ i $\vec{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ i tačkama $M_1 \in p_1$ i $M_2 \in p_2$. Koordinate tačaka su: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.
Ako se prave p_1 i p_2 sijeku, onda su vektori $\vec{p_1}$,$\vec{p_2}$ i M_1M_2 komplanarni (slika...), pa je njihov mješoviti proizvod nula, tj. $(\vec{p_1} \times \vec{p_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$ odnosno $(\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{p_1}) \cdot \vec{p_2} = 0$ odakle dobijamo *uslov presjeka dvije prave*:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.10}$$

Koordinate presječne tačke dobijaju se kao rješenje sistema jednačina datih pravih (kada svaku od datih pravih izrazimo kao presjek dvije ravni) ili iz parametarskih jednačina datih pravih.

Primjer 1.2.5. Odrediti n u jednačini prave $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{n}$ tako da se siječe sa pravom q: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$, pa zatim odrediti koordinate presječne tačke.

Rješenje. Iz uslova 1.2.10 određujemo vrijednost parametra n.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & n \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

Sada ćemo odrediti presječnu tačku ovih pravih.
Iz kanoničkih jednačina datih pravih izrazićemo njihove parametarske jednačine.

$$p: \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{array} \qquad q: \begin{array}{l} x = 2 + t_1 \\ y = 3 + 2t_1 \\ z = 4 + 3t_1 \end{array}$$

S obzirom da presječna tačka pripada obema pravama mora vrijediti:

$$\begin{array}{c} 1 + t = 2 + t_1 \\ 2 - t = 3 + 2t_1 \\ 1 + 3t = 4 + 3t_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} t - t_1 = 1 \\ -t - 2t_1 = 1 \\ 3t - 3t_1 = 3 \end{array}$$

Nakon rješavanja posljednjeg sistema jednačina dobijamo $t = \dfrac{1}{3}$, $t_1 = -\dfrac{2}{3}$.
Nakon uvrštavanja parametra t u parametarske jednačine prave p (ili parametra t_1 u parametarske jednačine prave q dobijamo koordinate presječne tačke:

$$P(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2).$$

Rastojanje između mimoilaznih pravih

Slika...
Zajednička normala datih pravih određena je vektorom pravca

$$\vec{n} = \vec{p_1} \times \vec{p_2}.$$

Najkraće rastojanje dvije mimoilazne prave je apsolutna vrijednost projekcije vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ na zajedničku normalu datih pravih, odnosno na vektor normale $\vec{n}$ kojim je ta normala određena.

$$d = \left| Pr_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_2} \right|$$

$$d = \left| \left| \overrightarrow{M_1M_2} \right| \cdot cos(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_2}) \right|$$

$$d = \left| \left| \overrightarrow{M_1M_2} \right| \cdot \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}}{|\vec{n}| \cdot \left| \overrightarrow{M_1M_2} \right|} \right|$$

$$d = \frac{\left| (\vec{p_1} \times \vec{p_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right|}{|\vec{p_1} \times \vec{p_2}|} \tag{1.2.11}$$

Obrazac 1.2.11 predstavlja obrazac za izračunavanje *najkraćeg rastojanja između dvije mimoilazne prave.*

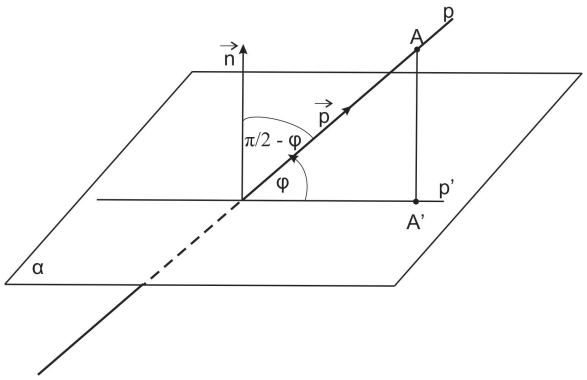
Primjer 1.2.6. Odrediti rastojanje između pravih:
$p_1 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2} \quad p_2 \colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}.$

Rješenje. Napišimo koordinate odgovarajućih pripadnih tačaka i vektora pravaca datih pravih: $M_1(-1,0,1) \in p_1$, $M_2(0,-1,2) \in p_2$, $\vec{p_1} = (1,1,2)$, $\vec{p_2} = (1,3,4)$.
Prvo provjeravamo da li se prave sijeku (uslov presjeka dvije prave (1.2.10)):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Dakle, gornja determinanta je različita od nule, pa zaključujemo da se prave ne sijeku, a očigledno nisu ni paralelne. Dakle, mimoilazne su.
Računamo $\vec{p_1} \times \vec{p_2} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, a $|\vec{p_1} \times \vec{p_2}| = 2\sqrt{3}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (1,-1,1)$.
Uvrštavajući dobijene vrijednosti u obrazac 1.2.11 dobijamo:

$$d = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Slika 1.8: Ugao između prave i ravni

1.3 Prava i Ravan

Definition 1.3.1. Ugao između prave i ravni je oštar ili prav ugao koji grade prava i njena normalna projekcija na tu ravan.

Theorem 1.3.2. *Sinus ugla φ između prave p i ravni α određen je formulom:*

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}|}{|\vec{p}|\,|\vec{n}|} \tag{1.3.1}$$

Dokaz. Ugao između ravni i prave je komplementan uglu između prave i vektora $\vec{n}$ koji je normalan na ravan slika 1.8. Ako je $\vec{p}$ vektor pravca prave p tada je $\measuredangle(\vec{p},\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, pa je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}|}{|\vec{p}|\,|\vec{n}|}.$$

Uslov normalnosti prave i ravni

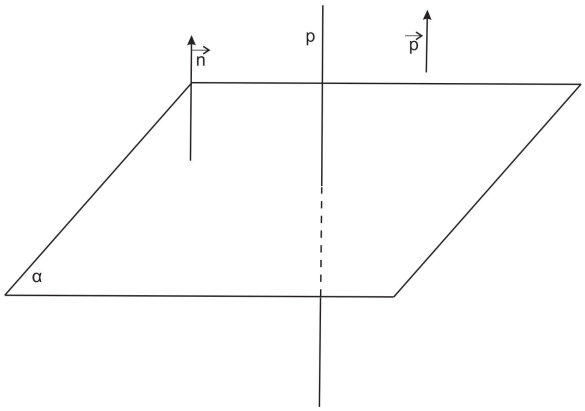
Sa slike 1.9 vidimo da ako je prava p normalna na ravan α da je tada $\vec{p} \parallel \vec{n}$, pa je $\vec{p}\times\vec{n} = 0$, odakle nakon uvrštavanja kooordinata vektora $\vec{p} = (l, m, n)$ i $\vec{n} = (A, B, C)$ dobijamo *uslov normalnosti prave i ravni*

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \tag{1.3.2}$$

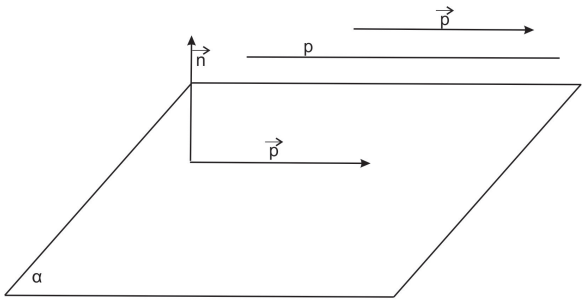
Uslov paralelnosti prave i ravni

Sa slike 1.11 vidimo da ako je prava p paralelna sa datom ravni α da je tada $\vec{p}\perp\vec{n}$, pa je $\vec{p}\cdot\vec{n} = 0$, odakle dobijamo *uslov paralelnosti prave i ravni*

$$A\cdot l = B\cdot m = C\cdot n \tag{1.3.3}$$



Slika 1.9: Prava normalna na ravan



Slika 1.10: Prava paralelna sa ravni

Presječna tačka prave i ravni

Ako prava p nije paralelna sa ravni α onda postoji jedinstvena presječna tačka P, $p \cap \alpha = \{P\}$.Koordinate tačke P dobijaju se rješavanjem sistema od tri linearne jednačine, od kojih dvije jednačine (dvije ravni) određuju pravu p, a treća jednačina je jednačina date ravni α. Tačka prodora se uvijek može odrediti kada je $\vec{p} \cdot \vec{n} \neq 0$ tj. prava p nije paralelna sa ravni α.

Ako je prava data u kanonskom obliku, izraze se parametarske jednačine prave p i vrijednosti x, y, z se uvrste u jednačinu date ravni α. Iz tako dobijene jednačine odredi se parametar t. Uvrštavanjem parametra t u parametarske jednačine prave p dobijamo koordinate presječne tačke P.

Primjer 1.3.3. Napisati jednačinu ravni α koja prolazi kroz tačku $M_1(-1, 2, -3)$ i normalna je na pravoj $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. Naći prodor date prave kroz nađenu ravan.

Rješenje. S obzirom da je tražena ravan okomita na datu pravu p za vektor normale ravni α možemo uzeti vektor pravca prave p, pa je $\vec{n}_\alpha = (1, 2, 1)$.

Dakle, vektorom normale $\vec{n}_\alpha$ i datom tačkom M_1 ravan je potpuno određena. U skalarni oblik jednačine ravni $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ uvrštavamo koordinate date tačke M_1 i vektora $\vec{n}$, pa nakon sređivanja dobijamo jednačinu tražene ravni α.

$$\alpha : x+2y+z=0.$$

Za određivanje tačke prodora prave p kroz ravan α izrazićemo parametarske jednačine prave p:

$$p: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2t \\ z &= t-2 \end{aligned}$$

koje ćemo uvrstiti u jednačinu ravni $\alpha : t+1+4t+t-2=0 \Rightarrow t=\frac{1}{6}$. Uvrštavanjem parametra t u parametarske jednačine prave p dobijamo koordinate presječne tačke tj. tačke prodora $P(\frac{7}{6},\frac{1}{3},-\frac{11}{6})$.

Primjer 1.3.4. Odrediti parametre α i β u ravni $\alpha x+\beta y+2z-1=0$ tako da bude normalna na pravu $p: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Rješenje. Iz uslova normalnosti prave i ravni (1.3.2) dobijamo jednačinu:

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta}{2}=\frac{2}{-1}$$

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{2}{-1} \Rightarrow \alpha=-2$$

$$\frac{\beta}{2}=\frac{2}{-1} \Rightarrow \beta=-4$$

RIJEŠENI ZADACI

1. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M_1(0,1,-2)$ i zaklapa sa koordinatnim osama uglove od $60^0, 45^0$ i 120^0.

Rješenje.
Jednačine prave koja prolazi kroz datu tačku su u kanonskom obliku:
p: $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z+2}{n}$, gdje je $\vec{p}=(l,m,n)$ vektor pravca prave p. Ugao između prave i ose Ox je ugao između vektora pravca prave $\vec{p}$ i jediničnog vektora $\vec{i}$ ose Ox, pa je

$$\cos\alpha=\frac{\vec{i}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}=\frac{(1,0,0)\cdot(l,m,n)}{|\vec{p}|}=\cos 60^0,$$

$$\text{a odavde je } \frac{l}{|\vec{p}|}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l=\frac{1}{2}|\vec{p}|$$

Analogno, dobijamo:

$$\cos\beta = \frac{\vec{j}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{(0,1,0)\cdot(l,m,n)}{|\vec{p}|} = \cos 45^0 \ ; \ \frac{m}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{p}|$$
$$\cos\gamma = \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{(0,0,1)\cdot(l,m,n)}{|\vec{p}|} = \cos 120^0 \ ; \ \frac{n}{|\vec{p}|} = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{-1}{2}|\vec{p}|$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti l, m i n u jednačinu prave p dobijamo:

$$p\colon \quad \frac{x}{\frac{1}{2}|\vec{p}|} = \frac{y-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{p}|} = \frac{z+2}{\frac{-1}{2}|\vec{p}|} \quad /\cdot\frac{1}{2}|\vec{p}|$$

Jednačina tražene prave p: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{z+2}{-1}$

2. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačke $M_1(1,-2,2)$, $M_2(2,3,-1)$ i normalna je na ravan β: $3x-2y+z-6=0$.

Rješenje.

Potrebno je odrediti vektor normale tražene ravni $\vec{n_\alpha}$. Neka je $\vec{n_\alpha} = (A,B,C)$. S obzirom da u ravni α leže tačke M_1 i M_2, tada je vektor $\vec{n_\alpha}$ okomit na vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ i na vektor normale date ravni β tj. na vektor $\vec{n_\beta} = (3,-2,1)$, pa se vektor $\vec{n_\alpha}$ može dobiti kao vektorski proizvod ta dva vektora.

$$\vec{n_\alpha} = \overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}$$

Nakon uvrštavnja koordinata vektora $\vec{n_\alpha} = (-1,-10,-17)$ i jedne od datih tačaka npr. $M_1(1,-2,2)$ u skalarni oblik jednačine ravni $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, dobijamo jednačinu tražene ravni $\alpha: \ x+10y+17z-15=0$.

3. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačku $M_1(-3,1,4)$ i pravu $p: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

Rješenje.

Prava p se može napisati kao presjek dvije ravni. Iz datog kanonskog oblika jednačine prave imamo:

$\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{-1}$, a odavde je $x-1=0$ i to je jednačina prve ravni, a iz jednakosti $\dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ dobijamo jednačinu druge ravni $3y+z+1=0$.

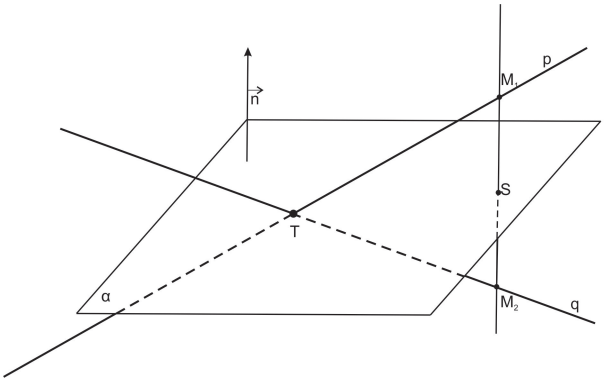
Tražena ravan pripada snopu (pramenu) ravni koji obrazuju ove dvije ravni.

Jednačina snopa glasi: $x-1+\lambda(3y+z+1)=0$.

Uvrštavanjem koordinata date tačke M_1 u ovu jednačinu dobijamo paramtar $\lambda = \dfrac{1}{2}$, pa nakon vraćanja dobijene vrijednosti λ u jednačinu snopa, dobijamo konačno jednačinu tražene ravni: $\alpha: \ 2x+3y+z=0$.

Napomena: U jednačini ravni α parametar $D = 0$ pa ova ravan prolazi kroz koordinatni početak.

4. Odrediti jednačinu prave q koja je simetrična pravoj p: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{-5}$ u odnosu na ravan α: $x + 2y + z - 3 = 0$.
Rješenje.
Sa slike 1.11 vidimo da prvo moramo odrediti koordinate tačke prodora T



Slika 1.11: Zadatak 4

date prave p kroz ravan α. Kroz tačku M_1 koja pripada pravoj p povući ćemo normalu na ravan, pa odrediti tačku prodora S normale kroz ravan α. Tačka S je središte duži M_1M_2 odakle dobijamo koordinate tačke M_2. Tražena prava q prolazi kroz tačke T i M_2.
Prvo izrazimo parametarske jednačine prave p

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 4t \\ z &= 3 - 5t \end{aligned} \quad ,$$

pa ove vrijednosti uvrstimo u jednačinu ravni α odakle dobijamo da je

$$t = -1.$$

Nakon vraćanja vrijednosti parametra t u parametarske jednačine prave p dobijamo koordinate tačke prodora $T(-1, -2, 8)$.
Iz tačke $M_1(1, 2, 3)$ povučemo normalu na ravan. Vektor pravca te normale je paralelan vektoru normale ravni α, $\vec{n_\alpha} = (1, 2, 1)$, pa je $\vec{n} = (1, 2, 1)$, te je jednačina prave n: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.
Istim postupkom kao što smo odredili prodor prave p kroz ravan α, tj. tačku T, nalazimo i koordinate tačke prodora prave n kroz ravan α, tačku $S\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{13}{6}\right)$. Tačka S je središte duži M_1M_2. Koordinate središta duži su $S\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$. Uvrštavanjem koordinata tačaka M_1 i S u

koordinate središta dobijamo koordinate tačke M_2.

$$\frac{1+x_2}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow x_2=-\frac{2}{3}$$
$$\frac{2+y_2}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow y_2=-\frac{4}{3}$$
$$\frac{3+z_2}{2}=\frac{13}{6}\Rightarrow z_2=\frac{4}{3}$$

Prava q je određena tačkama T i M_2, pa je jednačina tražene prave

$$q:\quad \frac{x+1}{-\frac{2}{3}+1}=\frac{y+2}{-\frac{4}{3}+2}=\frac{z-8}{\frac{4}{3}-8}$$

odnosno

$$q:\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-20}$$

.

5. Odrediti jednačinu ravni kojoj pripadaju paralelne prave
p_1: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ i p_2: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.
Rješenje.
Sa dvije paralelne prave je potpuno određena jedna ravan. Jednačinu ravni odredićemo pomoću tri nekolinearne tačke koje pripadaju ovim pravama. Iz kanonskih jednačina datih pravih odredimo koordinate tri tačke koje pripadaju ovim pravama.
Tačka $M_1(3,0,1)\in p_1$, tačka $M_2(-1,-1,0)\in p_2$ i $M_3(5,1,3)\in p_1$. Iz jednačine 1.1.5 (jednačina ravni kroz tri tačke) odredimo jednačinu ravni.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\alpha:\quad x+2y-2z-1=0$$

6. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz presjek ravni α: $x+y+z-1=0$ i β: $x-y+2z-7=0$ i polovi odsječak prave p: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-2}$ između datih ravni.
Rješenje.
Prvo ćemo odrediti tačke prodora P_1 i P_2 prave p kroz ravni α i β, a zatim središte duži P_1P_2. Tražena ravan pripada pramenu ravni koji određuju date ravni α i β i prolazi kroz središte duži P_1P_2.
Parametarske jednačine prave p glase:

$$p:\quad \begin{aligned} x&=t+1\\ y&=2t-1\\ z&=-2t \end{aligned}$$

Uvrštavanjem parametarskih jednačina prave p u jednačinu ravni α dobijamo vrijednost parametra $t = 1$, pa nakon uvrštavanja u parametarske jednačine prave dobijamo tačku prodora $P_1(2, 1, -2)$. Analogno, nakon uvrštavanja parametarskih jednačina prave p u jednačinu ravni β dobijamo da je $t = -1$ i tačku prodora $P_2(0, -3, 2)$.
Središte duži P_1P_2 je tačka $S(1, -1, 0)$.
Jednačina pramena ravni određena dvjema datim ravnima glasi:

$$x + y + z - 1 + \lambda(x - y + 2z - 7) = 0$$

Nakon uvrštavanja koordinata tačke S u jednačinu pramena ravni dobijamo vrijednost parametra $\lambda = -\frac{1}{5}$. Vratimo parametar λ u jednačinu pramena i dobijamo jednačinu tražene ravni $\pi: \ 4x + 6y + 3z + 2 = 0$.
7. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(-5, 2, -1)$ i siječe pod pravim uglom pravu p: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{-2}$.
Rješenje.
Odredićemo jednačinu ravni π koja sadrži datu tačku M i okomita je na datu pravu p. Dakle, za vektor normale ove ravni možemo uzeti vektor pravca prave $\vec{p} = (3, 5, -2)$, pa jednačna ravni u skalarnom obliku glasi:

$$\pi: \ 3(x + 5) + 5(y - 2) - 2(z + 1) = 0$$

$$\pi: \ 3x + 5y - 2z + 3 = 0$$

Sada izrazimo parametarske jednačine prave p.

$$p: \quad \begin{aligned} x &= 3t + 1 \\ y &= 5t \\ z &= -2t - 2 \end{aligned}$$

Ove jednačine uvrstimo u jednačinu ravni π i dobijemo $t = -\frac{5}{19}$. Tačka prodora prave p kroz ravan π je $P'(\frac{4}{19}, -\frac{25}{19}, -\frac{28}{19})$. Tražena prava q je prava određena tačkama P' i M:

$$q: \ \frac{x+5}{99} = \frac{y-2}{-63} = \frac{z+1}{-9} \quad / \cdot 9$$

$$q: \ \frac{x+5}{11} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+1}{-1}$$

8. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi tačkom $T(2, 1, -2)$, paralelna je sa pravcem $p: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{1}$ i udaljena je od njega za $\sqrt{2}$ jedinica.
Rješenje.
Napisaćemo jednačinu tražene ravni π u skalarnom obliku: $Ax + By + Cz +$

$D = 0$. Tačka T pripada ravni π, pa mora vrijediti $D = -2A - B + 2C$. Tražena ravan je paralelna sa pravcem p pa je $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$. Iz ovog uslova dobijamo jednačinu $A + B + C = 0$. Imamo uslov da je prava p udaljena od ravni π za $\sqrt{2}$. To znači da je to i dužina (intenzitet) vektora normale $\vec{n} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{2}$. Iz naprijed navedenog dobijamo sistem od dvije jednačine sa dvije nepoznate:

$$\begin{gathered} A^2 + B^2 + C^2 = 2 \\ A + B + C = 0 \end{gathered}$$

Kvadriranjem druge jednačine imamo $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC = 0$. Uvrštavanjem prve jednačine u prethodno dobijenu jednčinu dobijamo $2 + 2AB + 2BC + 2AC = 0$, a nakon sređivanja

$$AB + AC + BC = -1 \tag{1.3.4}$$

U obrazac za udaljenost tačke od ravni uvrstimo tačku sa prave p, to je tačka $(1, 2, -5)$

$$\begin{gathered} \frac{|A + 2B - 5C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{2} \\ \frac{|A + 2B - 5C - 2A - B + 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{2} \\ |-A + B - 3C| = 2 \end{gathered}$$

Imamo dva slučaja
1^0 Ako je $-A + B - 3C \geq 0$ u tom slučaju imamo:

$$\begin{gathered} -A + B - 3C = 2 \\ A + B + C = 0 \end{gathered}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo $A = -1 - 2C$, $B = 1 + C$. Ovako dobijene koeficijente uvrštavamo u jednačinu(1.3.4), pa nakon sređivanja dobijamo jednačinu $-3C(C + 1) = 0$. Dakle, $C = 0$ ili $C = -1$.
Za $C = 0 :\ A = -1,\ B = 1$. Koeficijenti A, B i C zadovoljavaju uslov $-A + B - 3C \geq 0$, pa jednačina tražene ravni glasi:

$$-x + y + 1 = 0$$

Za $C = -1 :\ A = 1,\ B = 0$. Koeficijenti A, B i C zadovoljavaju uslov $-A + B - 3C \geq 0$, pa jednačina tražene ravni glasi:

$$x - z - 4 = 0$$

2^0 Ako je $-A + B - 3C < 0$ u tom slučaju imamo:

$$\begin{gathered} -A + B - 3C = -2 \\ A + B + C = 0 \end{gathered}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo $A = 1 - 2C$, $B = C - 1$, pa ponovo uvrštavamo dobijene koeficijente A, B i C u jednačinu (1.3.4). Nakon sređivanja dobijamo da je $C = 0$ ili $C = 1$. Za obe ove vrijednosti dobijamo ponovo iste jednačine ravni kao u prvom slučaju.
Dakle, zaključujemo da imamo dva rješenja tj. dvije ravni koje zadovoljavaju tražene uslove. Jednačine tih ravni glase: $-x+y+1 = 0$ i $x-z-4 = 0$.

Zadaci za samostalan rad.