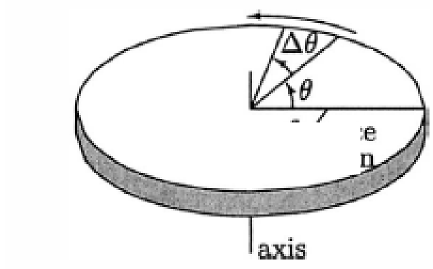
Rotaciono kretanje

Ugaoni pomjeraj, brzina i ubrzanje

Posmatrajmo rotaciju krutog tijela (diska) oko fiksne ose O (pravac z) normalne na ravan diska (Slika 1). Uočimo tačku koja rotira oko ose rotacije O po kružnici radijusa r. Položaj tačke na rubu diska se može predstaviti polarnim koordinatama (r, Θ). Pri pomjeranju tačke iz položaja θ, koji ćemo smatrati referentnim položajem, u položaj θ+Δθ tačka **pređe put s (dužina kružnog luka)** i **napravi ugaoni pomjeraj Δθ** pri čemu važi da je:



$$s = r\Delta\theta$$

odnosno:

$$\Delta\theta = \frac{s}{r}$$

gdje je: s[m] pređeni put, r[m] radijus kružne putanje, Δθ[rad] ugaoni pomjeraj.

Slika 1. Materijalna tačka iz položaja P rotira oko ose O, normalne na ravan x-y, u smjeru suprotonom smjeru kretanja kazaljke na satu (slika lijevo). U počenom trenutku t_i materijalna tačka P se nalazi u položaju θi, a u krajnjem trenutkut_f materijalna tačka se nalazi u položaju Q. (slika desno).

Ovaj ugao za koji se pomjerio (zarotirao disk) naziva se ugaoni pomjeraj Δθ i izražava se u jedinicima za ugao – radijanima (rad).

Radijan predstavlja centralni ugao za koji je poluprečnik kružnice jednak dužini odgovarajućeg kružnog luka:

$$1rad = \frac{360^0}{2\pi}rad = \frac{180^0}{\pi}rad \qquad 1^0 = \frac{\pi}{180^0}$$

Veza između radijana i stepena data je sljedećom relacijom:

$$\theta\ (\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ}\theta$$

Ugaona brzina

Posmatrajmo materijalnu tačku koja rotira iz nepokretne ose koja prolazi kroz tačku O i normalna je na ravan x-y. U početnom trenutku t_i materijalna tačka se nalazi u položaju P i ima položaj θ_i, a u krajnjem trenutku t_f materijalna tačka se nalazi u položaju Q kojem odgovara položaj θ_f . Dakle, za vrijeme $\Delta t=t_f-t_i$ materijalna tačka se pomjerila iz položaja P u položaj Q i pri tome opisala **ugaoni pomjeraj:**

$$\Delta\theta=\theta_f-\theta_{i.,}$$

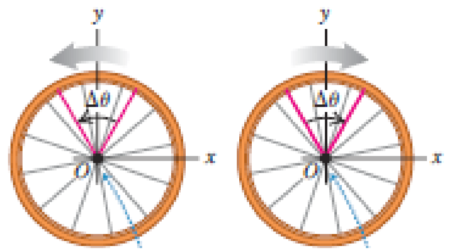
pri čemu je: θ_f(rad) krajnji položaj materijalne tačke izražen u radijanima, θ_i(rad) početni položaj materijalne tačke izražen u radijanima.
Po analogiji sa translatornim kretanjem može se uvesti **srednja ugaona brzina kao** ugaoni pomjeraj $\Delta\theta$ napravljen u toku vremenskog intervala Δt:

$$w = \frac{\theta_f - \theta_t}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Ugaona brzina izražava se u radijanima po sekundi (rad/s).
Trenutna ugona brzina definiše se kao granična vrijednost srednje ugaone brzine kada je vremenski interval infinitezimalno mali ($\Delta t \to 0$), odnosno:

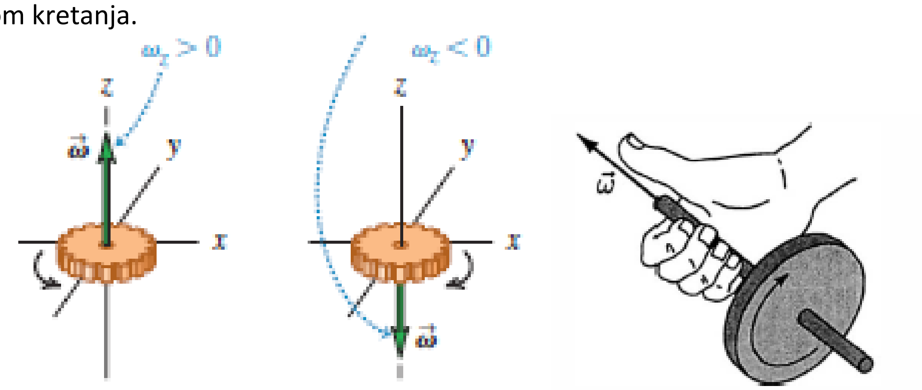
$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Ugaona brzina je usmjerena duž ose rotacije z, a može biti pozitivna ili negativna u zavisnosti od smjera rotacije tijela pa tako kada θ raste, $w>0$,a kada θ opada $w<0$ (Slika 2).



Slika 2: Kada θ raste tj.θ>0 tada je iw>0 (slika lijevo), a kada θopada odnosno θ<0 tada je i w<0 (slikadesno).

Pravac vektora ugaone brzine je pravac ose rotacije materijalne tačke ili krutog tijela, međutim smjer vektora ugaone brzine se određuje pravilom desne ruke (Slika 3): Ako prsti prate smjer rotacije tada palac pokazuje smjer vektora ugaone brzine tako da je u slučaju rotacije u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu smjer ugaone brzine pozitivan (Slika 3 - lijevo), a u slučaju rotacije u smjeru kazaljke na satu smjer ugaone brzine je negativan (Slika 3 - desno).
Napomena: Ugaona brzina kao vektorska veličina je naročito značajna kada se pravac ose rotacije mijenja tokom kretanja.



Slika 3: Ako prsti pokazuju smjer rotacije tijela tada palac pokazuje smjer vektora ugaone brzine.

Ugaono ubrzanje

Kada se intenzitet ugaone brzine krutog tijela mijenja tokom vremena znači da tijelo ubrzava ili usporava.

Srednje ugaono ubrzanje definiše se kao količnik promjene ugaone brzine Δw u intervalu vremena Δt u toku kojeg je promjena nastala:

$$\alpha = \frac{w_f - w_t}{t_f - t_i} = \frac{\Delta w}{\Delta t}\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Srednje ugaono ubrzanje je dakle promjena ugaone brzine u jedinci vremena, obilježava se sa α, a izražava u rad/s^2.

Trenutno ugaono ubrzanje definiše se kao granična vrijednost srednjeg ugaonog ubrzanja kada $\Delta t \to 0$:

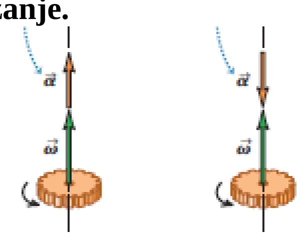
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Vektor ugaonog ubrzanja dat je izrazom:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

Pri rotacionom kretanju, ukoliko je **ugaono ubrzanje α pozitivno, tada ugaona brzina w raste**; **ukoliko je α negativno tada w opada**. Rotaciono kretanje je ubrzano ukoliko su α i w istog predznaka i usporeno ukoliko su α i w različitog predznaka. (Potpuno iste relacije važe i za linearnu brzinu i ubrzanje kod pravolinijskog kretanja).

Kada rotira oko nepokretne ose svaka čestica krutog tijela rotira kroz isti ugao, ima istu ugaonu brzinu i isto ugaono ubrzanje.



Slika 4: Kada je osa rotacije nepokretna ugaona brzina i ugaono ubrzanje imaju isti pravac.Rotaciono kretanje je ubrzano ukoliko su a i w istog smjera (slika lijevo) i usporeno ukoliko su a i w različitog smjera (slika desno).

Rotaciono kretanje tijela konstantnim ugaonim ubrzanjem

Ukoliko se ugaono ubrzanje ne mijenja tokom vremena tada se tijelo kreće ravnomjerno-ubrzano (kretanje tijela sa konstantnim ugaonim ubrzanjem) odnosno α=const.

Neka se tijelo kreće ravnomjerno-ubrzano pri čemu u početnom trenutku $t_i=0$ ima ugaonu brzinu $w_i=w_0$, a u krajnjem trenutku $t_f=t$ brzinu $w_f=w$, tada je njegovo ugaono ubrzanje dato izrazom:

$$\alpha = \frac{w - w_0}{t - 0} = \frac{w - w_0}{t}.$$

Prema tome, ugaona brzina pri ravnomjerno-ubrzanom rotacionom kretanju krutog tijela može se zapisati u obliku:

$$w = w_0 + \alpha t$$

Kako se pri ovakvom kretanju brzina ravnomjerno mijenja srednja vrijednost brzine se može zapisati u obliku:

$$w_{sr} = \frac{w_0 + w}{2}$$

Srednja ugaona brzina se može izraziti i preko ugaonog pomjeraja:

$$w_{sr} = \frac{\theta - \theta_0}{t_i}$$

Izjednačavanjem poslednje dvije jednačine:

$$\frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{w_0 + w}{2}$$

dobija se:

$$\theta - \theta_0 = (\frac{w_0 + w}{2})t$$

Zamjenom w iz definicije srednjeg ugaonog ubrzanja:

$$\alpha = \frac{w - w_0}{t}; w = w_0 + \alpha t$$

može se dobiti izraz za ugaoni pomjeraj:

$$\theta - \theta_0 = (\frac{w_0 + w_0 + \alpha t}{2})t$$

odnosno:

$$\theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

gdje je θ_0 početni ugao (koji odgovara položaju tijela u trenutku t=0).

Dalje se, eliminacijom vremena iz izraza za ugaonu brzinu i izraza za ugaoni pomjeraj, može dobiti veza između ugaonog pomjeraja, ugaonog ubrzanja i brzine:

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha\theta$$

Dakle, može se napraviti potpuna analogija između jednačina kinematike kod rotacionog i linijskog kretanja konstantnim ubrzanjem:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad v_f = v_i + at$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad x_f = x_i + v_i t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \qquad v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

Primjer: Točak krene iz stanja miroanja i nakon 18 s dostiže ugaonu brzinu 216 rad/s. Izračunati ugaono ubrzanje i broj oscilacija koje točak napravi za to vrijeme.

Rješenje: Ugaono ubrzanje se može odrediti iz definicije ubrzanja, pri čemu je prema uslovu zadtaka $w_0=0$*:*

$$\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{w - w_0}{t} = \frac{216\frac{rad}{s}}{18s} = 12\frac{rad}{s^2}$$

Broj obrtaja se može odrediti iz jednačine koja povezuje broj obrtaja sa ugaonim pomjerajem. Ukoliko je za jedan obrtaj napravljen ugaoni pomjeraj 2π, onda se za N obrtaja napravi ugaoni pomjeraj $2\pi N$. Dakle, može se zapisati:

$$\theta = \frac{\alpha t^2}{2} = 2\pi N$$

Odavde je traženi broj obrtaja N:

$$N = \frac{\alpha t^2}{4\pi} = 310 obrtaja$$

Ugaone i linijske veličine

Posmatrajmo tačku P koja rotira oko nepokretne ose O u smjeru suprotnom smjeru kretanja kazaljke na satu (Slika 5). Za interval vremena **dt** tačka P pređe put **ds** pa je njena **linijska (tangencijalna) brzina** data relacijom:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Pošto je kružni luk s povezan sa ugaonim pomjerajem θ relacijom:

$$s = r\Delta\theta$$

gdje je r konstantno, izraz za brzinu se može transformisati u:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt}$$

Kako je trenutna ugaona brzna w=dθ/dt, zamjenom u prethodni izraz dobija se veza između linijske i ugaone brzine kod rotaciong kretanja:

$$v = r \cdot w.$$

U vekorskom obliku veza između linijske i ugaone brzine data je izrazom:

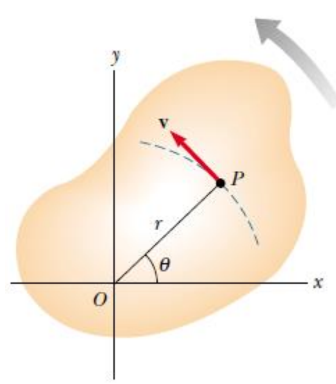
$$\vec{v} = \vec{w} x \vec{r}$$

$$v = w \cdot r \cdot \sin \angle(\vec{w}, \vec{r})$$

pri čemu je v brzina proizvoljne tačke krutog tijela koja se nalazi na odstojanju r od ose rotacije, a w ugaona brzina kruog tijela.

Kada su vektor brzine i radijus vektor međusobno normalni (sinθ=1) izraz postaje:

$$v = r \cdot w.$$



Slika 5. Rotacija krutog tijela oko nepokrente ose O koja je normalna na ravan xy i leži na osi z koordinatnog sistema.

Da bismo pronašli vezu između tangencijalnog i ugaonog ubrzanja posmatrajmo sada tačku P koja se kreće po kružnoj putanji ubrzanjem a oko nepokretne ose O (Slika 6). Tačka P će pored tangencijalnog ubrzanja usmjerenog duž tangente u datoj tački sa smjerom koji se poklapa sa smjerom kretanja, odnosno vektorom brzine u datoj tački, imati i **centripetalno ubrzanje usmjereno ka centru kružne putanje O:**

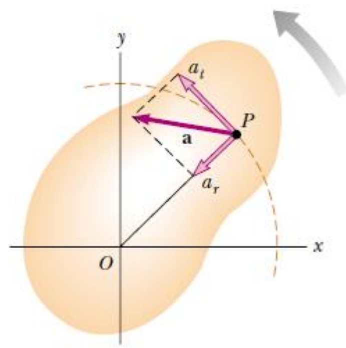
$$a_r = \frac{v^2}{r} = rw^2$$

Kako je tangencijalno **tangencijalno ubrzanje** prvi izvod brzine po vremenu:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{dw}{dt} = r\alpha$$

Tako se **ukupno linijsko ubrzanje** može zapisati kao:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2 w^4} = r\sqrt{\alpha^2 + w^4}$$



Slika 6. Rotacija krutog tijela koje se kreće ubrzanooko nepokretne ose O. Ubrzanje a tačke P ima komponentu duž pravca kretanja (tangente u datoj tački) a_t i pravca duž radijusa kružne putanje a_r.

Primjer: Krećući se stalnom ugaonom brzinom 20 rad/s točak poluprečnika 20cm u jednom trenutku počne da usporava i zaustavi se nakon 5 s. Koliko je ugaono, a koliko tangencijalno ubrzanje tačaka na obodu točka?

Rješenje: Ugaono ubrzanje s emože odrediti direktno iz izraza za brzinu kod ravnomjerno-usporenog rotacionog kretanja:

$$w = w_0 - \alpha t$$

Pošto se na kraju datog vremena tijelo zaustavlja, konačna brzina w=0, pa je prema tome:

$$w = w_0 - \alpha t = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{w_0}{t} = 4\frac{rad}{s^2}$$

Tangencijalno ubrzanje se može odrediti iz jednačine koja ga povezuje sa ugaonim ubrzanjem:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{dw}{dt} = r\alpha = 0{,}2m \cdot 4\frac{rad}{s^2} = 0{,}8\frac{m}{s^2}$$

Zadaci za vježbu:

1.Točak poluprečnika 10 cm počinje da rotira ugaonim ubrzanjem 2 rad/s^2. Odrediti:

a) ukupno ubrzanje tačke na obodu točka poslije 10 s od početka kretanja.

b) ugaoni pomjeraj i pređeni put tačke na obodu točka u toku tog vremena.

2.Točak rotira ugaonom brzinom 20 rad/s. U jednom trenutku počne da usporava ugaonim ubrzanjem 0,5 rad/s^2. Nakon koliko vremena će se točak zaustaviti.

PITANJA ZA PROVJERU ZNANJA

1. Napisati jednačinu ravnomjerno-usporenog rotacionog kretanja.
2. Automobil mase m kreće se po kružnoj putanji poluprečnika r brzinom v po kružnom toku:
    a. Kolika tangencijalna sila djeluje na tijelo?
    b. Koliki moment proizvodi tangencijalna sila?
    c. Koliki moment sile proizvodi normalna sila?
3. Ako je ukupan moment spoljašnjih sila koje djeluju na tijelo nula šta se može reći o momentu impulsa tijela?
4. Koji izraz povezuje tangencijalnu i ugaonu brzinu?
5. Kako je usmjeren vektor ugaone brzine ako tijelo rotira u smjeru kazaljke na satu?
6. Da li je vektorski proizvod dva vektora uvijek vektor? Kako je usmjeren? Koje fizičke veličine predstavljaju vektorski proizvod dva vektora?
7. Kolikom ugaonom brzinom rotira Zemlja oko Sunca?
8. Na standardni CD može da se snimi muzika u maksimalnom trajanju od 74 minuta i 33 sekunde. Kada slušamo muziku koliko obrtaja CD napravi za to vrijeme? Izračunati koliko je ugaono ubrzanje CD-a pretpostavljajući da se ne mijenja tokom vremena.

Literatura

1. David Halliday, Robert Resnik, Jearl Walker, **Fundamentals of Physics**
2. Young and Freedman, **University physics with modern physics**
3. Slobodan Backović, **Fizička mehanika**, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica, 1999
4. Richard Fitzpatrick, **Classical Mechanics**, **An introductory course**
5. Marko Mirković, **Fizika**, Visoka građevinsko-geodetska škola u Beogradu, Beograd, 2008