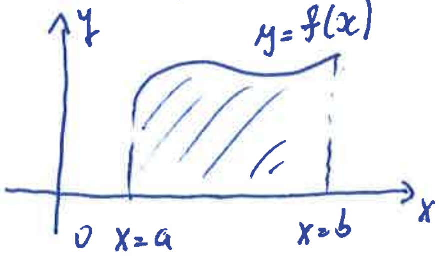
Примјене одређеног интеграла

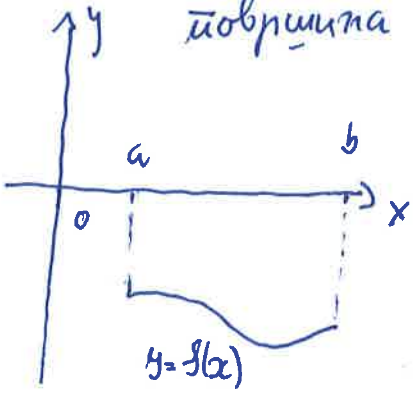
Површина фигуре у равни

1. Нека је функција f ненегативна и непрекидна на $[a,b]$. Из дефиниције одређеног интеграла слиједи да је површина геометријске слике која је ограничена са $x=a$, $x=b$, $y=0$ и $y=f(x)$ (криволинијски трапез над $[a,b]$)



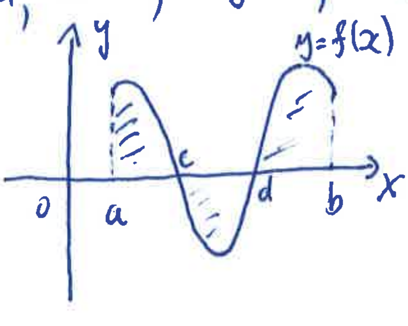
$$P=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Ако је f непрекидна на $[a,b]$ и $f(x)\le 0$, $\forall x\in[a,b]$ тада је површина геом. слике ограничене, $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$



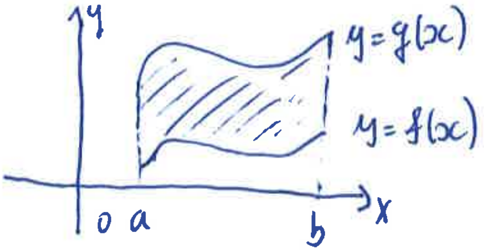
$$P=-\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Нека је f непрекидна функција на $[a,b]$. Уколико f није константног знака на $[a,b]$, тада интервал $[a,b]$ дијелимо на дјелове на којима је константног знака. Тада је површина геометријске слике ограничена са $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ једнака



$$P=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$$

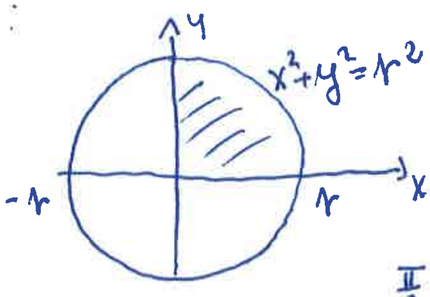
4. Нека су функције f и g непрекидне на $[a,b]$ и за $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Тада је површина геометријске слике ограничене $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=g(x)$ једнака



$$P = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

Примјер Израчунати површину круга полупречника r (централна кружница)

Рјешење:



$$P = 4P_1 \quad , \quad P_1 = \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

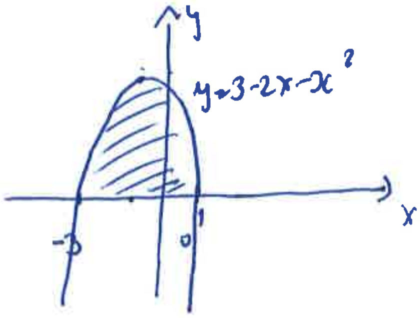
$$P_1 = \begin{cases} x = r\sin t \\ dx = r\cos t\,dt \end{cases} = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \cancel{\frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt}^{\,0} = \frac{r^2\pi}{4}$$

$$\boxed{P = 4P_1 = r^2\pi}$$

Примјер Израчунати површину ограничену кривом $y = 3-2x-x^2$ и правом $y=0$

Рјешење Одредимо пресјечне тачке криве $y = 3-2x-x^2$ на Ox-оси. Имамо



$$3-2x-x^2 = 0 \quad /\cdot(-1)$$

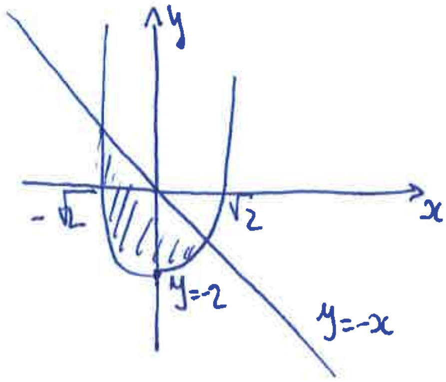
$$x^2+2x-3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$$

$$P = \int_{-3}^{1} (3-2x-x^2)\,dx = \dots = \frac{32}{3}$$

<u>Примјер</u> Израчунати површину слике (фигуре) ограничене правом $y=-x$ и параболом $y=x^2-2$

<u>Рјешење</u>:



Пресјечне тачке су

$$x^2-2=-x$$
$$x^2+x-2=0$$
$$x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$$

$$P=\int_{-2}^{1}\left(-x-(x^2-2)\right)dx = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,dx = \left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+4+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}$$

$$= 6+\frac{3}{2}+\frac{9}{3} = \frac{36+9-18}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

~~Примјер~~

5. Ако је функција дата у параметарском облику $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, тада се површина фигуре рачуна по једној од формула

$$P=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt \qquad \text{или } P=-\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,y'(t)\,dt$$

<u>Примјер</u> Израчунати површину фигуре ограничене x-осом и једним луком криве $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$, $t\in[0,2\pi]$.

<u>Рјешење</u>

$$P=\int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$

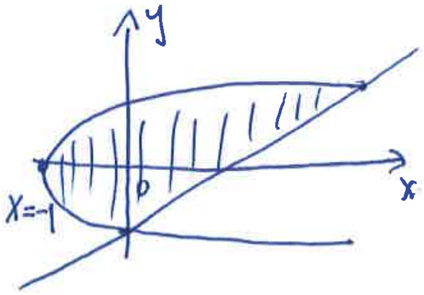
$$= a^2\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = a^2\cdot 2\pi - 2a^2\cancel{\int_{0}^{2\pi}\cos t\,dt} + a^2\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}2\pi = 3\pi a^2$$

Примјер Израчунати површину фигуре ограничене са

$y^2 = x+1$ и $y = x-1$

Рјешење



Пресјечне тачке са x осом су

$(x-1)^2 = x+1$

$x^2-2x+1 = x+1$

$x(x-3) = 0 \Rightarrow x=0 \lor x=3$

На Oy оси имамо $y = -1$ (за $x=0$) и $y=2$ (за $x=3$)

па је површина

$$P = \int_{-1}^{2}\left(y+1-(y^2-1)\right)dy = \int_{-1}^{2}\left(y+2-y^2\right)dy = \left(2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= 4+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 6+\frac{3}{2}-\frac{9}{3} = \frac{36+9-18}{6} = \frac{9}{2}$$

Дужина лука криве

Нека функција f дефинисана на $[a,b]$ има непрекидан извод на том сегменту. Претпоставимо да је $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ подјела интервала $[a,b]$. Означимо са

$$A(a,f(a)),\quad B(b,f(b)),\quad T_i(x_i,f(x_i)),\quad i=0,1,\ldots,n-1$$

тачке на кривој одређеној функцијом f. Дужина дужи између $T_i(x_i,f(x_i))$ и $T_{i+1}(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ је

$$\sqrt{(f(x_{i+1})-f(x_i))^2+(x_{i+1}-x_i)^2}=\sqrt{\left(\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right)^2+1}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Користећи Лагранжову теорему (средње вриједности) добијамо

$$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=f'(\xi_i),\quad \xi_i\in(x_i,x_{i+1})$$

Из овога слиједи да је дужина дужи T_iT_{i+1} једнака

$$\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,(x_{i+1}-x_i).$$

Када је растојање између тачака T_i и T_{i+1} мало, дужина полигоналне линије $T_0T_1\ldots T_n$ апроксимира дужину l лука криве AB. Према томе, дужина лука AB је приближно једнака

$$I\approx\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Користећи дефиницију одређеног интеграла добијамо

Теорема Нека функција f има непрекидан први извод на интервалу $[a,b]$. Дужина лука криве између тачака чији су апсцисе a и b једнака је

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

Пример Израчунати дужину лука криве $y = \ln(\cos x), 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 30

Рјешење $y' = \frac{1}{\cos x} \cdot \cos'(x) = -\operatorname{tg} x$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx \cos x}{1-\sin^2 x} = \begin{cases} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{cases} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{1-t} \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}$$

Ако је функција f дата у параметарском облику $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, тада се дужина лука криве рачуна

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt,$$

гдје су x' и y' непрекидни на $[\alpha, \beta]$.

Пример Израчунати дужину лука криве $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Рјешење:

$$x'(t) = 3a\cos^2 t \cdot (-\sin(t))$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = (3a)^2 \left(\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t \right)$$

$$= (3a)^2 \sin^2 t \cos^2 t = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 \cdot (2 \sin t \cos t)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 \sin^2 2t$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \frac{3}{2} a |\sin 2t|$$

Како је функција $|\sin 2t|$ периодична са периодом $\frac{\pi}{2}$ добијамо

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = 6a\,\frac{(-\cos 2t)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a$$

Запремина и површина обртног тијела

Нека је дата крива $y=f(x)$ која је непрекидна на $[a,b]$. Запремина тијела насталог ротацијом криве $y=f(x)$ око Ox-осе над интервалом $[a,b]$ је

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Ако је функција f задата у параметарском облику

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

при чему је $x=x(t)$ монотона и први извод јој је непрекидан, онда се запремина рачуна по формули

$$V = \pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\,|x'(t)|\,dt$$

Површина омотача обртног тијела се рачуна по формули

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

Ако је функција f задата у параметарском облику при чему су функције $x=x(t)$ и $y=y(t)$ непрекидно диференцијабилне, тада је

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Примјер: Израчунати запремину и површину лопте полупречника r.

Рјешење: Тијело које настаје ротацијом криве $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r,r]$ око Ox-осе представља лопту полупречника r. Тада је

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\cdot 2\int_0^r(r^2-x^2)\,dx=2\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r$$

$$=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4r^3\pi}{3}.$$

Сада рачунамо површину омотача. Како је $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}$, имамо

$$\sqrt{1+(y'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}},$$ па је

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot\frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}\,dx=4\pi r\int_0^r dx=4r^2\pi$$

Примјер: Дата је $x^2+y^2=16$ и права $x=2$.

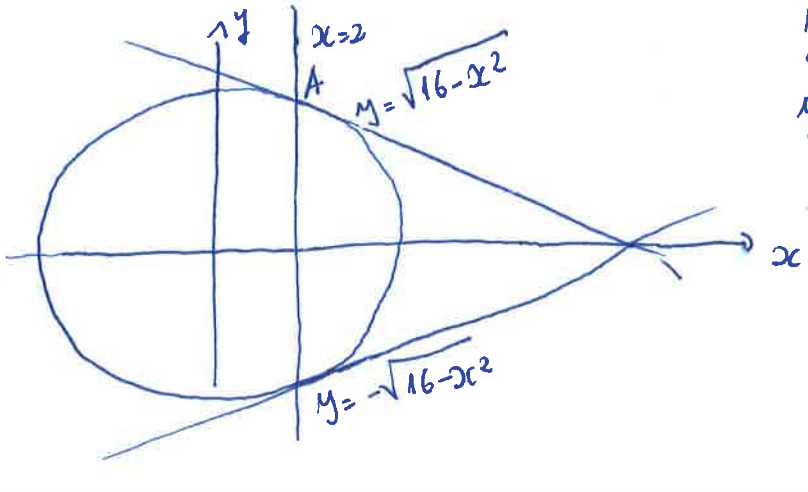
(a) Одредити једначине тангенти кружнице у тачкама пресјека праве и кружнице

(b) Наћи површину геометријске слике ограничене кружницом и тангентама.

(c) Наћи запремину тијела које настаје ротацијом површи ограничене тангентама и кружницом око Ox-осе

Рјешење:

(a)



Једначине тангенти у тачкама $A_i(2, y(2))$ су:

1° Ако је $y>0$, тражена тачка је $A_1(2, 2\sqrt{3})$, па је једначина тангенте

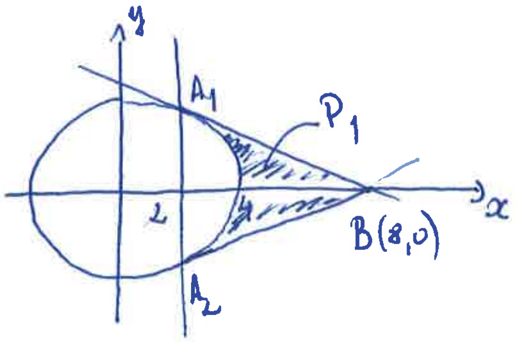
$$y - 2\sqrt{3} = y'(2)(x-2) \quad , \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}} \quad \text{у } x=2 \text{ је } y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \iff y = \frac{8-x}{\sqrt{3}}$$

2° Ако је $y<0$, тражена тачка је $A_2(2, -2\sqrt{3})$ па је јед. тангенте

$$y + 2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \iff y = \frac{x-8}{\sqrt{3}}$$

(b)



Пресечна тачка тангенти са Ox осом је $B(8,0)$

Због симетричности тражене површине $P = 2P_1$, где је

$$P_1 = \int_2^8 \frac{8-x}{\sqrt{3}}\,dx - \int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(8x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^8 - \int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена} \\ x = 4\sin t \end{array} \right. = 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \ldots = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(64 - 32 - 16 + 2\right) - \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) = \frac{18\sqrt{3}}{3} - \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$$

$$P = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3}$$

(c) $$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^8 \left(\frac{8-x}{\sqrt{3}}\right)^2 dx - \pi\int_2^4 (16-x^2)\,dx = \ldots = \frac{32\pi}{3}$$