Chapter 1

Integralni račun

Određeni integral

Neka je funkcija f definisana na skupu $[a, b]$. Ako postoji realan broj I takav da je

$$I = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad (\|P\| = \max_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_i)$$

nezavisno od izbora podjele P intervala $[a, b]$ i izbora tačaka $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n$, tada se I naziva određenim integralom ili **Rimanovim** integralom funkcije f na $[a, b]$ i označava se sa

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Broj a je donja granica intervala, a broj b gornja granica intervala. **Ekvidistantna** podjela je podjela kod koje je $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, $x + i = a + \frac{b-a}{n} i$.

Neka je funkcija f ograničena na $[a, b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ jedna podjela intervala $[a, b]$. Ako stavimo da je

$$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}} f(x), \quad i = 0, 1, ..., n-1,$$

tada se $R_*(P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ i $R^*(P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ nazivaju redom **donja** i **gornja Darbuova suma**.

Ograničena funkcija f je **integrabilna** na $[a, b]$ ako i samo ako vrijedi

$$\lim_{\|P\|\to 0} (R^*(P) - R_*(P)) = 0$$

nezavisno od podjele P.

Svaka **neprekidna** funkcija na $[a, b]$ je **integrabilna** na $[a, b]$.

Nedređeni integral

Neka je funkcija f definisana na intervalu (a, b). Ako postoji funkcija F takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

kažemo da je funkcija F **primitivna funkcija** funkcije f na (a, b).

Neodređeni integral funkcije f na intervalu (a, b) je skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu (a, b) i označavamo ga sa $\int f(x)dx$. Ako je F primitivna funkcija funkcije f, tada

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Iz tabele za izvode dobijamo tabelu za integrale

funkcija	izvod
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + C,\ a \neq 1, a > 0$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C,\ \|x\| < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C,\ a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C,\ a \neq 0$

Osobine:

- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \neq 0,$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
- **Smjena promjenljive.** Ako su funkcije f, φ, φ' neprekidne tada je

  $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C,$$

- **Parcijalna integracija**. Ako su u i v diferencijabilne funkcije i ako su njihovi izvodi neprekidni, tada

  $$\int u(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i F njena primitivna funkcija na $[a, b]$, tada vrijedi **Njutn-Lajbnicova formula**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Integracija nekih klasa funkcija

- **Integracija racionalnih funkcija.** Neka je data racionalana funkcija

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n i m redom sa realnim koeficijentima. Tada se $R(x)$ može prikazati u obliku zbira polinoma i određenog broja elementarnih racionalnih funkcija oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

gdje $k \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$.

- **Integracija nekih racionalnih funkcija.** Integrali oblika

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx, \ \frac{p_i}{q_i} \in mathbbQ, \ i = 1, 2, ..., k,$$

gdje je R racionalna funkcija $k+1$ promjenljive se smjenom

$$t^q = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad q = NZS(q_1, ..., q_k),$$

se svode na integrale racionalnih funkcija.

- Integrali oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad ax^2+bx+c \geq 0, \ a \neq 0$$

se svode na integrale racionalnih funkcija pomoću **Ojlerovih smjena**:

  - $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t$, ako je $a > 0$,
  - $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, ako je $c > 0$,
  - $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x)2} = t(x-x_1)$ ili $= t(x-x_2)$ ako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- Integrali oblika

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

gdje su $m, n, p \in \mathbb{R}$, $m = \frac{m_1}{m_2}, n = \frac{n_1}{n_2}$, $p = \frac{p_1}{p_2}$, se naziva **integral binomnog diferencijala**. Može se pokazati da je ovaj integral elementarna funkcija ako i samo ako je bar jedan od brojeva $p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$ cijeli broj. U tim slučajevima se koriste smjene:

  - Ako je $p \in \mathbb{Z}$ uvodimo smjenu $x = t^k$, gdje je $k = NZS(m_2, n_2)$,
  - Ako je $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ uvodimo smjenu $a + bx^n = t^{p_2}$,
  - Ako je $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ uvodimo smjenu $ax^{-n} + b = t^{p_2}$.

- **Integrali trigonometrijskih funkcija.** Integrali oblika

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

gdje je R racionalna funkcija se može svesti na integral racionalne funkcije pomoću **smjene** $t = \tan\frac{x}{2}$. U tom slučaju je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Zadaci

1. Izračunati integrale:
(a) $\int x(x^2-13)^{23}dx$, (b) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}$,
(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$, (d) $\frac{xdx}{5+x^4}$.
Rješenje. (a) Ako uvedemo smjenu $x^2-13=t$, tada je $2xdx=dt$, pa integral postaje

$$\frac{1}{2}\int t^{23}dt = \frac{1}{48}t^{24}+C.$$

Ako vratimo smjenu dobijamo

$$\int x(x^2-13)^{23}dx = \frac{(x^2-13)^{24}}{48}+C.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x} &= \left|\arctan x = t,\ \frac{dx}{1+x^2} = dt\right| = \int \frac{dt}{t}\\ &= \ln|t|+C = \ln|\arctan x|+C.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = \left|e^{-x}=t,\ -e^{-x}dx=dt\right|\\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{x^2+1}} = -\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C\\ &= -\ln|e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}|+C.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{5+x^4} &= \left|x^2=t,\ 2xdx=dt\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+5}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}}+C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{5}}+C\end{aligned}$$

2. Izračunati $I = \int \arcsin^2 x dx$.
Rješenje. Zadatak ćemo riješiti koristeći parcijanu integraciju. Ako stavimo

da je $u = \arcsin^2 x$, $dv = dx$, tada je $du = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$, pa polazni integral postaje

$$I = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Da bismo riješili integral izvodimo još jednu parcijanu integraciju tako što biramo $u = \arcsin x$, $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, dok je $dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, odakle uvođenjem smjene $1 - x^2 = t$, dobijamo $v = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je

$$\begin{aligned} I &= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx\right) \\ &= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} - 2x + C. \end{aligned}$$

3. Izračunati

$$I_n = \int \frac{dx}{x^n(1-x)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje. Zadatak ćemo rješavati rekurzivno, tj. integral I_n ćemo izraziti pomoću I_{n-1} i postupak ćemo nastaviti dok ne dođemo do integrala $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x)}$. Imamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{x^n(1-x)} = \int \frac{1-x+x}{x^n(1-x)}dx = \int \frac{dx}{x^n} + I_{n-1} = \dots \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-n}}{k-n} + I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-n}}{k-n} + \int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{x} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-n}}{k-n} + \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| + C. \end{aligned}$$

4. Odrediti integral

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}.$$

Rješenje. Primjetimo da treba da vrijedi $1 - x^2 > 0$, pa je za $0 < x < 1$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}.$$

Ako uvedemo smjenu $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1} = t$, $t > 0$, tada je $\dfrac{1}{x^2} - 1 = t^2$ odakle slijedi $-\dfrac{2}{x^3}dx = 2tdt$, $dx = -tx^3dt$, pa je integral I jednak

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dt}{4t^2+5} = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{\sqrt{5}} + C \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{5}} + C, \quad 0 < x < 1.$$

Za $-1 < x < 0$, na sličan način dobijamo $I = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{5}} + C$.
Dakle,

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{5}} + C, \quad |x| < 1,\ x \neq 0.$$

5. Odrediti integral

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$I = \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} dx, \quad x > 0.$$

Odredimo sada $\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} dx$. Ako i brojilac i imenilac podintegralne funkcije podijelimo sa x^2, $x \neq 0$, a nakon toga uvedemo smjenu $x - \frac{1}{x} = t$, $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$ dobijamo

$$\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}$$

$$= \ln|t + \sqrt{t^2+2}| = \ln\left|x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right| + C.$$

Odatle je

$$I = \ln\left|x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right| + C, \quad x > 0.$$

Za $x < 0$ je

$$I = \ln\left|x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right| + C.$$

6. Riješiti integral

$$\int \frac{1}{1+x^6} dx.$$

Rješenje. Polazni integral možemo zapisati u obliku

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^6+1} dx = \int \frac{dx}{x^4-x^2+1} - \int \frac{x^2}{x^6+1} dx$$
$$= I_1 - I_2,$$

gdje je

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)} \\ &= \int \frac{Ax + B}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} dx + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} dx. \end{aligned}$$

Odredimo nepoznate koeficijente. Ako jednakost

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{(Ax + B)(x^2 + x\sqrt{3} + 1) + (Cx + D)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)}{(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)}, \end{aligned}$$

pomnožimo sa njenim imeniocem dobijamo

$$1 = (A+C)x^3 + (B+D+A\sqrt{3}-C\sqrt{3})x^2 + (A+C+B\sqrt{3}-D\sqrt{3})x + B + D$$

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz promjenljive na lijevoj i desnoj strani prethodne jednakosti imamo sistem

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D + A\sqrt{3} - C\sqrt{3} &= 0 \\ A + C + B\sqrt{3} - D\sqrt{3} &= 0 \\ B + D &= 1, \end{aligned}$$

čije je rješenje $A = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ i $D = \frac{1}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} dx + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{x + \sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} dx \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x - \sqrt{3}}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x + \sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}\right) + \frac{1}{2} \arctan\left(2x - \sqrt{3}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \arctan\left(2x + \sqrt{3}\right) + C_1. \end{aligned}$$

Drugi integral je

$$I_2 = \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = (\text{smjena } x^3 = t) = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan x^3 + C_2,$$

pa je polazni integral

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right) + C_1 - \frac{1}{3}\arctan x^3 - C_2. \end{aligned}$$

Ako uvedemo novu konstantu $C = C_1 - C_2$, dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{3}\arctan x^3 + C. \end{aligned}$$

7. Izračunati

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje. Primjetimo da je

$$I = \int x^{-1/2}\left(x^{1/4}+1\right)^{1/3} dx,\ m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3}.$$

Kako je $\dfrac{m+1}{n} = -2 \in \mathbb{Z}$ uvodimo smjenu $1+x^{1/4} = t^3$, pa je $\dfrac{1}{4}x^{-3/4}dx = 3t^2dt$ i polazni integral postaje

$$I = \int \frac{12t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}dt = 12\int (t^6-t^3)dt = \frac{12}{7}t^7 - \frac{12}{4}t^4 + C.$$

Nakon vraćanja smjene je

$$I = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+x^{1/4})^7} - 3\sqrt[3]{(1+x^{1/4})^4} + C.$$

8. Izračunati

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}dx.$$

Rješenje. Ako uvedemo Ojlerovu smjenu $\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$, tada je $1-2x-x^2 = x^2t^2-2xt+1$ odakle slijedi $x = 2\dfrac{t-1}{t^2+1}$ i $dx = 2\dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}dt$. Polazni integral (nakon sređivanja) postaje

$$I = \int \frac{-t^2+t+1}{t(t-1)(t^2+1)}dt = \int \frac{A}{t}dt + \int \frac{B}{t-1}dt + \int \frac{Ct+D}{t^2+1}dt.$$

Metodom neodređenih koeficijenata nalazimo da je $A=-1$, $B=1$, $C=0$ i $D=-2$, odakle slijedi

$$\begin{aligned} I &= -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\arctan t + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| - 2\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

9. Izračunati integral

$$\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx.$$

Rješenje. Ako uvedemo smjenu $\tan x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, tada polazni integral postaje

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx = \int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+t+1)}dt \\
&= \int \frac{t^2+t+1}{(t^2+1)(t^2+t+1)}dt - \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)(t^2+t+1)}dt = \int \frac{dt}{t^2+1} \\
&- \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \arctan t - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \arctan t \\
&- \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \arctan t - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \arctan(\tan x) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}} + C \\
&= x - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

10. Izračunati integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x)dx.$$

Rješenje. Ako uvedemo smjenu $x = \dfrac{\pi}{3} - t$, polazni integral I postaje

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan t}\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}-\tan t}{1+\sqrt{3}\cdot\tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan t}\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln 4dt - I.
\end{aligned}$$

Odavde je traženi integral

$$I = \frac{\pi}{6}\ln 4.$$

11. Odrediti integral

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje. **Prvi način:** Iz binomne formule dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x^2)^n dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Drugi način: Ideja je da se integral riješi rekurzivno. Ako označimo $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, tada je

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1} dx \\ &= I_{n-1} - \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} dx \ \ (u = x,\ dv = x(1-x^2)^{n-1} dx) \\ &= I_{n-1} - \left(\frac{-x(1-x^2)}{2n} \Big|_0^1 + \frac{1}{2n} I_n \right) = I_{n-1} - \frac{I_n}{2n} \end{aligned}$$

Odavde je

$$I_n = \frac{2n}{(2n+1)} I_{n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} I_{n-2} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

12. Izračunati

$$\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx, \qquad a > 0.$$

Rješenje. Primjetimo da je

$$\begin{aligned} &\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx = \int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (a^2 - 2ax + x^2)} dx \\ &= \int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (a-x)^2} dx = a \int_0^{2a} \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Uvedimo smjenu $t = \dfrac{x-a}{a}$, $dx = adt$, tada je

$$a \int_0^{2a} \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2} dx = a^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} dt.$$

Nakon smjene $t = \sin u,\ dt = \cos u du$, prethodni integral postaje

$$\begin{aligned} &a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u} \cos u du \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos u| \cos u du = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du = a^2 \frac{\pi}{2} + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u du = a^2 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

13. Izračunati određeni integral

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

Rješenje. Izvođenjem parcijalne integracije $u = x,\ dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx,\ v = -\frac{1}{2\sin^2 x}$, dobijamo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$

Primjena određenog integrala

Računanje površine primjenom određenog integrala

Neka je funkcija f nenegativna i neprekidna na $[a,b]$. Površina krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a,b]$ je data sa

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Površina oblasti $\{(x,y) : a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$ pod uslovom da su f i g neprekidne na $[a,b]$ i $f \le g$ je

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Ako je funkcija f data u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pri čemu $x = x(t)$ ima neprekidan nenegativan prvi izvod, a $y = y(t)$ je neprekidna i nenegativna na $[\alpha, \beta]$ i $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, onda je

$$P = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Dužina luka krive

Neka funkcija f ima neprekidan prvi izvod na $[a,b]$. Dužina luka krive između tačaka čije su apscise ai b jednaka je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, gdje su $x_t = x'(t)$ i $y_t = y'(t)$ neprekidni, tada je

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t^2 + y_t^2}dt.$$

Zapremina obrtnog tijela

Neka je kriva $y = f(x)$ neprekidna na $[a,b]$. Zapremina tijela nastalog rotacijom date krive oko $O_x$ose nad $[a,b]$ je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Ako je $y = f(x)$ zadata u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pri čemu je $x = x(t)$ monotona i neprekino diferencijabilna, onda je

$$V = \pi \left| \int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dx \right|.$$

Zadaci

1. Odrediti površinu figure ograničene parabolom $y = -x^2 - 2x + 3$, tangentom u tački $A(2, -5)$ i y osom.
   Rješenje. Koeficijent pravca tangente posmatrane krive je $k = y'(2) = -2 \cdot 2 - 2 = -6$, pa je jednačina tangente jednaka
   $$y + 4 = -6(x - 2) \implies y = -6x + 7.$$
   Tražena površina (data na slici 1.1) je
   $$P = \int_0^2 \big(-6x + 7 - (-x^2 - 2x + 3)\big)\, dx = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{8}{3}.$$

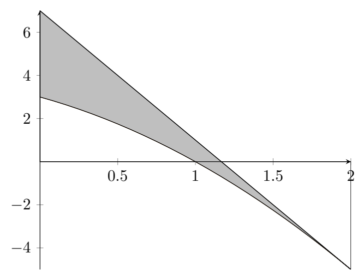


Figure 1.1: Tražena površina

2. Izračunati površinu ograničenu krivom $y = 3 - 2x - x^2$ i pravom $y = 0$.
   Rješenje. Prvo odredimo presječne tačke prave i parabole. Dobijamo
   $$3 - 2x - x^2 = 0 \iff (x - 1)(x + 3) = 0,$$
   pa su presječne tačke $A(-3, 0)$ i $B(1, 0)$. Tražena površina (data na slici 1.2) je

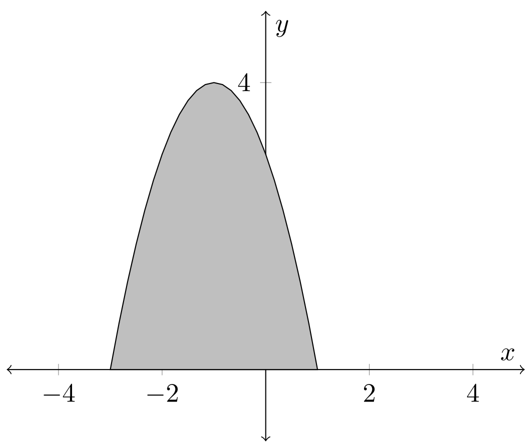


Figure 1.2: Površina ograničena parabolom i $x-$osom

$$P = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2) dx = ... = \frac{32}{3}.$$

3. U presječnim tačkama prave $x - y + 1 = 0$ i parabole $y = x^2 - 4x + 5$ povučene su tangente na parabolu. Izračunati površinu ograničenu tangentama i parabolom.
Rješenje. Odredimo prvo presječne tačke parabole i prave. Njih dobijamo na sljedeći način:

$$x + 1 = x^2 - 4x + 5 \iff x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) = 0.$$

Odavde vidimo da su presječne tačke $A(1,2)$ i $B(4,5)$, a jednačine tangenti u tim tačkama su:

- Tačka $A(1,2)$: Koeficijent pravca tangente u toj tački je $k_A = y'(1) = 2 - 4 = -2$, pa je jednačina tangente $y - 2 = k_A(x-1)$, $y = -2x + 4$.
- Tačka $B(4,5)$: Koeficijent pravca tangente u toj tački je $k_B = y'(4) = 8 - 4 = 4$, pa je tražena jednačina tangente $y - 5 = k_B(x-4)$, $y = 4x - 11$.

Takođe, presječna tačka tangenti je $C\left(\frac{5}{2}, -1\right)$, pa je tražena površina (pogledati sliku 1.3)

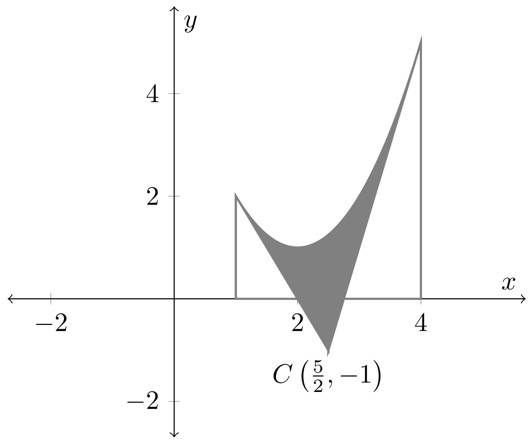


Figure 1.3: Površina ograničena parabolom i njenim tangentama

$$P = \int_1^{\frac{5}{2}} \left(x^2 - 4x + 5 - (-2x+4)\right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(x^2 - 4x + 5 - (4x - 11)\right) dx$$
$$= \int_1^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x-4)^2 dx = \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{-\frac{3}{2}}^0 x^2 dx = \frac{9}{4}.$$

4. Data je kružnica $x^2 + y^2 = 16$ i prava $x = 2$.
   (a) Odrediti jednačine tangenti kružnice u tačkama presjeka prave i kružnice.
   (b) Naći površinu lika ograničenog kružnicom i tangentama.
   (c) Naći zapreminu tijela koje nastaje rotacijom lika ograničenog tangentama i kružnicom oko O_x- ose.

Rješenje.

(a) Jednačine tangenti u tački $A(2, y)$ su:

(i) Ako je $y > 0$, tada je $y'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$, pa je $y'(2) = -\dfrac{2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Dakle, jednačina tangente kružnice u tački $A(2, 2\sqrt{3})$ je jednaka

$$y - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2) \iff y = \frac{8 - x}{\sqrt{3}}.$$

(ii) Ako je $y < 0$, tada je $y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$, pa je $y'(2) = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Na sličan način pokazuje se da je jednačina tangente kružnice u tački $A_1(2, -2\sqrt{3})$ jednaka

$$y = \frac{x - 8}{\sqrt{3}}.$$

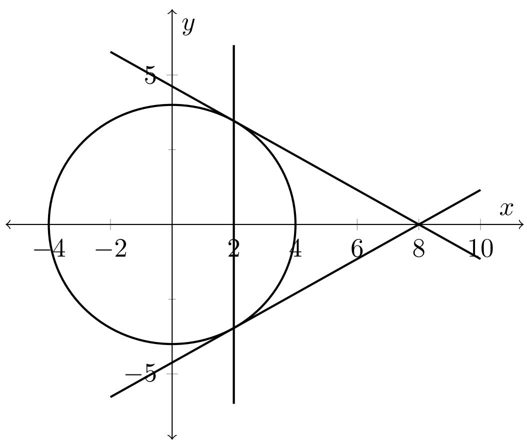
(b) Tražena površina je jednaka

$$P = 2P_1,$$

gdje je

$$P_1 = P_t - P_k.$$

P_t je površina pravouglog trougla, a P_k je površina kružnog isječka (pogledati sliku).



Primjetimo da je presječna tačka tangenti kružnice jednaka $B(8, 0)$. Tada je

$$P_t = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$
\begin{aligned}
P_k &= \int_2^4 \sqrt{16-x^2}dx \quad (\text{smjena } x = 4\sin t) \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 16|\cos t|\cos t dt = 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\
&= 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right) \\
&= \frac{8\pi}{3} + 8\cdot \frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sin\frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Tražena površina je:

$$
P = 2\left(6\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3}.
$$

(c) Zapremina tijela koje nastaje rotacijom lika ograničenog kružnicom i tangentama oko O_x ose je

$$
V = V_1 - V_2,
$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \pi\int_2^8 \left(\frac{8-x}{\sqrt{3}}\right)^2 dx = \frac{\pi}{3}\int_2^8 (x-8)^2 dx \quad (\text{smjena } x-8=t) \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{-6}^0 t^2 dt = \frac{216\pi}{9} = \frac{72\pi}{3},
\end{aligned}
$$

$$
V_2 = \pi\int_2^4 (16-x^2)dx = \pi\left(16\cdot 2 - \frac{56}{3}\right) = \frac{40\pi}{3}.
$$

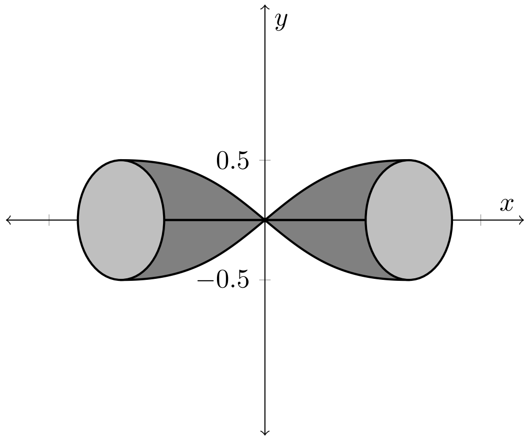
Tražena zapremina je:

$$
V = \frac{72\pi}{3} - \frac{40\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}.
$$

5. Luk krive $y = \dfrac{|x|}{1+x^2}$ u intervalu između dvije tačke maksimuma rotira oko O_x- ose. Naći zapreminu dobijenog rotacionog tijela.
Rješenje. Primjetimo da je $f(x)$ parna funkcija i da je za $x > 0$

$$
f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.
$$

Tačke maksimuma funkcije $f(x)$ su $M_1(1, f(1))$ i $M_2(-1, f(-1))$. Tražena zapremina (data na slici)



jednaka je

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$
$$= 2\pi \left(- \frac{x}{2(1+x^2)} \bigg|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right)$$
$$\left(\text{parcijalna integracija } u = x,\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} \right)$$
$$= 2\pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Nesvojstveni integral

Nesvojstveni integral prve vrste

Neka je funkcija f definisana na $[a, +\infty)$ i integrabilna na $[a, b]$ za svako $a < b$. Granična vrijednost

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx,$$

naziva se **nesvojstveni integral prve vrste.** Ako ova granična vrijednost postoji i konačna je nesvojstveni integral je konvergentan.

Analogno se definiše nesvojstveni integral prve vrste na $(-\infty, b]$. Nesvojstevni integral prve vrste na $(-\infty, \infty)$ se definiše

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.$$

Neka je $0 \leq f(x) \leq g(x)$ za sve $x \in [a, +\infty)$. Tada iz konvergencije integrala $\int_a^\infty g(x)dx$ slijedi konvergencija integrala $\int_a^\infty f(x)dx$, a iz divergencije integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ slijedi divergencija integrala $\int_a^\infty g(x)dx$.

Neka su funcije f i g definisane i nenegativne na $[a, +\infty)$ i integrabilne na svakom podintervalu $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Ako je $g(x) > 0$ za $x \in [a, +\infty)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, gdje je $K \in \mathbb{R} \cup +\infty$, tada:

1. Ako $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ konvergira i $0 \leq K < \infty$, onda i $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira.
2. Ako $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ divergira i $0 < K \leq +\infty$ onda i $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ divergira.

Primjetimo da ako je $K > 0$ konačan, onda nesvojstveni integrali $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ i $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

Nesvojstveni integral druge vrste

Ako je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b - \varepsilon]$ za svako $\varepsilon > 0$, a nije ograničena u okolini tačke b, tada se granična vrijednost

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

naziva **nesvojstveni integral druge vrste**. Ako f nije ograničena u nekoj okolini tačke $c \in (a, b)$, tada definišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+, \mu\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\mu}^b f(x)dx \right).$$

Granična vrijednost

$$\text{v.p} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

naziva se **glavna vrijednost** nesvojstvenog integrala.

Zadaci

1. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(\cos \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx.$$

Rješenje. Koristićemo razvoj funkcija $x \mapsto \cos x$ i $x \mapsto \ln(1 + x)$ u Maklorenov red. Primjetimo da je funkcija $x \mapsto \ln\left(\cos \dfrac{1}{x}\right)$ negativna na intervalu $(1,+\infty)$. Vrijedi

$$\cos\frac{1}{x}=1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

i

$$\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p}=-\frac{1}{2x^{p+2}}+o\left(\frac{1}{x^{p+3}}\right).$$

Kako je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p}}{-\frac{1}{2x^{p+2}}}=1,$$

zaključujemo da dati integral konvergira za $p+2>1$, odnosno $p>-1$, a divergira za $p\leq-1$.

2. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$\int_1^\infty x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^\alpha dx$$

u zavisnosti od realnog parametra α.
Rješenje. Kako je $\cos\frac{1}{x}\sim 1-\frac{1}{2x^2}$ kad $x\to\infty$, to je $1-\cos\frac{1}{x}\sim\frac{1}{2x^2}$, kad $x\to\infty$. Tada vrijedi

$$x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^\alpha\sim\frac{1}{2^\alpha x^{2\alpha-1}},$$

pa kako integral $\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}dx$ konvergira za $\alpha>1$, a divergira za $\alpha\leq1$, to polazni integral konvergira za $2\alpha-1>1$, odnosno za $\alpha>1$, a divergira za $\alpha\leq1$.

3. Odrediti

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx.$$

Rješenje. Primjetimo da je

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^{2n+1}e^{-x^2}dx.$$

Ako uvedemo smjenu $x^2=t$, $2xdx=dt$, tada je

$$\int_0^b x^{2n+1}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{b^2}t^ne^{-t}dt=\frac{1}{2}I_n.$$

Nakon parcijalne integracije $u = t^n$, $v = -e^{-t}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{b^2} t^n e^{-t} dt = -t^n e^{-t}\Big|_0^{b^2} + n\int_0^{b^2} t^{n-1}e^{-t}dt = -b^{2n}e^{-b^2} + nI_{n-1} \\
&= -b^{2n}e^{-b^2} + n(-b^{2(n-1)}e^{-b^2} + (n-1)I_{n-2}) \\
&= -e^{-b^2}(b^{2n} + nb^{2(n-1)}) + n(n-1)I_{n-2} \\
&= ... = -e^{-b^2}(b^{2n} + nb^{2(n-1)} + ... + n(n-1)\cdots 2b^2) + n!I_0 \\
&= -\frac{b^{2n} + nb^{2(n-1)} + ... + n(n-1)\cdots 2b^2}{e^{b^2}} + n!\int_0^{b^2} e^{-t}dt \\
&= -\frac{b^{2n} + nb^{2(n-1)} + ... + n(n-1)\cdots 2b^2}{e^{b^2}} - n!(e^{-b^2} - e^0) \\
&= -\frac{b^{2n} + nb^{2(n-1)} + ... + n(n-1)\cdots 2b^2 + n!}{e^{b^2}} + n!.
\end{aligned}$$

ako je $\lim\limits_{b\to+\infty} -\dfrac{b^{2n} + nb^{2(n-1)} + ... + n(n-1)\cdots 2b^2 + n!}{e^{b^2}} = 0$, tada je

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{n!}{2}.$$

4. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, gdje je

$$a_n = \frac{1}{n^n}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^n e^{-x}dx.$$

Rješenje. Odredimo $I_n = \displaystyle\int_0^A x^n e^{-x}dx$. Koristeći parcijalnu integraciju $u = x^n$, $dv = e^{-x}dx$, $v = -e^{-x}$, kao i u prethodnom zadatku dobijamo

$$I_n = -\frac{A^n + nA^{n-1} + ... + n(n-1)\cdots 2A + n!}{e^A} + n!.$$

Kako je $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{A^n + nA^{n-1} + ... + n(n-1)\cdots 2A + n!}{e^A} = 0$, tada je $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

5. Ispitati konvergenciju integrala

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}dx &= |\ln x = t, dx = xdt| = \int_0^{\ln 2}\frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{\ln 2}\frac{dt}{t^p} \\
&= \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{\ln 2^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) & , p \neq 1, \\ \lim_{\varepsilon\to0^+}(\ln(\ln 2)) - \ln\varepsilon) & , p = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da integral konvergira za $1 - p > 0$, odnosno $p < 1$, a divergira za $p \geq 1$.