Редови

Бројни (нумерички) редови

Дефиниција Нека је дат низ реалних бројева $\{a_n\}$ и нека је $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Уређени пар $(\{a_n\}, \{S_n\})$ назива се РЕД, a_n је ОПШТИ ЧЛАН реда, а S_n - n-та парцијална сума реда.
Ако постоји коначна гранична вриједност

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

кажемо да је ред КОНВЕРГЕНТАН и да је S СУМА РЕДА. То означавамо са $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. За ред који није конвергентан кажемо да је ДИВЕРГЕНТАН.

Примјер: Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Рјешење: Како је $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, имамо

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Како је $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, ред је конвергентан.

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ се назива ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕД. У случају $q=1$ ред дивергира. Ако је $q \neq 1$ за његове парцијалне суме имамо

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Ако је $|q|<1$, ред је конвергентан и његова сума је $S = \frac{1}{1-q}$.
Ако је $q>1$, тада је $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$, па је ред дивергентан.
За $q<-1$ $\lim_{n\to\infty} q^n$ - не постоји, па је ред дивергентан.

Примјер Испитати конвергенцију редова:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Рјешење: 1. $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \quad / \cdot 2 \quad \Rightarrow$

$$2S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} - \dots - \frac{n}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{2-1}{2} + \frac{3-2}{2^2} + \dots + \frac{n-(n-1)}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}$$

Како је $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}\to 0}{1-\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{n}{2^n}}^{0}\right) = 2$, ред конвергира

2. $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \dots + \frac{n^2}{2^n} \quad / \cdot 2$

$$2S_n = 1 + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \dots + \frac{n^2}{2^{n-1}}$$

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 + \frac{2^2-1}{2} + \frac{3^2-2^2}{2^2} + \dots + \frac{n^2-(n-1)^2}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n}$$

$$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = \underline{2n-1}$$

$$S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n} \quad / \cdot 2$$

$$2S_n = 2 + 3 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-2}} - \frac{n^2}{2^{n-1}}$$

$$S_n = 2S_n - S_n = 5 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-2}} - \frac{n^2}{2^{n-1}} - 1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2^2} - \dots - \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$+ \frac{n^2}{2^n}$$

$$S_n = 4 + \frac{5-3}{2} + \frac{7-5}{2^2} + \frac{9-7}{2^3} + \dots + \frac{2n-1-(2n-3)}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n} = 4 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}}} - \frac{2n-1+n^2}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}} \to 0}{1-\frac{1}{2}} - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2+2n-1}{2^{n-1}}}_{=0} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{=0} = 6$$

Ако ред конвергира, тада за низ његових парцијалних сума $\{S_n\}$ вриједи

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

На овај начин смо добили потребан услов за конвергенцију редова

<u>Теорема</u> Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>Примјер</u> Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ дивергира јер $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

<u>Напомена:</u> Услов $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ <u>није довољан</u> услов за конв. реда.

Ако је ред $(\{a_n\}, \{S_n\})$ конвергентан и његова сума S, тада вриједи

$$S = S_n + r_n$$

гдје је $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ и назива се ОСТАТАК РЕДА

<u>Теорема</u> Нека је r_n остатак конвергентног реда. Тада $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$

Користећи Кошијев критеријум конвергенције за низове, добијамо КОШИЈЕВ КРИТЕРИЈУМ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ ЗА РЕДОВЕ.

<u>Теорема</u>: Ред $(\{a_n\}, \{S_n\})$ је конвергентан ако и само ако вриједи

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(\forall p\in\mathbb{N})\ |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

<u>Примјер</u>: Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира (иако $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$)

<u>Доказ</u> Ако ставимо да је $n=p$

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

<u>Примјер</u> Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n+1)}$

<u>Рјешење</u>:

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+2)(n+1)}+\dots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right|\overset{\text{нej. троугла}}{\leq}\frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)(n+2)}+$$

$$\dots+\frac{|\sin(n+p)x|}{(n+p)(n+p+1)}\leq\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<$$

$$=\frac{1}{n+1}-\cancel{\frac{1}{n+2}}+\cancel{\frac{1}{n+2}}-\cancel{\frac{1}{n+3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n+p}}-\frac{1}{n+p+1}$$

$\frac{1}{n+1}$, докле $|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

Ако узмемо $n_0=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor+1$, добијамо тврђење.

<u>Теорема</u>: Нека су $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ конвергентни и $\lambda\in\mathbb{R}$. Тада су редови $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n$ конвергентни и вриједи

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ ;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

<u>Доказ</u> Нека су S_n^1 и S_n^2 парцијалне суме редова $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, редом. Доказ слиједи из чињенице $\lim_{n\to\infty}S_n^1=S^1$ и $\lim_{n\to\infty}S_n^2=S^2$

Редови са позитивним члановима

Дефиниција: Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред реалних бројева. Ако за сваки $n \in \mathbb{N}$ вриједи $a_n > 0$, онда кажемо да је то РЕД СА ПОЗИТИВНИМ ЧЛАНОВИМА.

Теорема: Ред са позитивним члановима је конвергентан ако и само ако је низ његових парцијалних сума ограничен одозго.

Доказ: Пошто је низ парцијалних сума реда монотоно растући, он је конвергентан ако и само је ограничен одозго.

Примјер: Показати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+n}}$ конвергентан.

Рјешење: Покажимо да је $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\sqrt{1+k}}$ ограничен одозго.

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2^2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2^n\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

Теорема (ПОРЕДБЕНИ КРИТЕРИЈУМИ) Нека су дати редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са позитивним члановима

I Ако је $a_n \leq c \cdot b_n$ $(c > 0)$ за (скоро) свако $n \in \mathbb{N}$, тада:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

II Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, онда:

1. За $K = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

2. За $K = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

3. За $0 < K < +\infty$ редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су ЕКВИКОНВЕРГ.

III Ако је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, тада

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

Доказ: I Нека су S_n^1 и S_n^2 парцијалне суме редова $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, редом. Ако је $a_n \leq C \cdot b_n$ $(C>0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тада је $S_n^1 \leq C \cdot S_n^2$. Према томе, из ограничености низа $\{S_n^2\}$ слиједи ограниченост низа $\{S_n^1\}$, одакле добијамо тврђење. С друге стране, из $\lim_{n\to\infty} S_n^1 = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^2 = +\infty$, па из дивергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ слиједи дивергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

II 1. Нека је $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Из дефиниције граничне вриједности

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon,$$

па је

$$(\forall n \geq n_0) \quad a_n < \varepsilon \cdot b_n$$

Примјеном критеријума I добијамо тврђење.

2. Ако је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, тада $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$

$$\frac{a_n}{b_n} > 1$$

Одавде је

$$b_n < a_n \quad \forall n \ge n_0$$

па на основу I добијамо тврђење.

3. Нека је $0 < K < +\infty$ и изаберимо $\varepsilon = \frac{K}{2}$. Тада по деф. граничне вриједности низа

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_0) \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon \quad \text{тј}$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \frac{K}{2} \iff -\frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} - K < \frac{K}{2} \quad /+K \iff \frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3K}{2}$$

Тада је $a_n < \frac{3K}{2} b_n$ и $b_n < \frac{2}{K} a_n$

и тврђење слиједи из I.

III Из датог услова $(\forall n \ge n_0)$ вриједи

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \le \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}; \quad \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \le \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}; \dots; \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

па множењем ових неједнакости добијамо

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \le \frac{b_{n+1}}{b_{n_0}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \quad \left(a_{n+1} \le C \cdot b_{n+1}\right)$$

одакле на основу I добијамо тврђење.

Примјер: Испитати конвергенцију редова:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$

Рјешење: 1. $\frac{1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, па из дивергенције хармонијског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ слиједи дивергенција полазног реда.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sin\frac{1}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ конвергира (геометријски ред), па и полазни ред конвергира.

<u>Теорема</u> (ИНТЕГРАЛНИ КРИТЕРИЈУМ) Нека је f непрекидна, позитивна и монотоно нерастућа функција на $[1,+\infty)$. Тада су

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

еквиконвергентни.

<u>Пример</u> Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$, јер је интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ конвергентан за $\alpha > 1$, а дивергентан за $\alpha \leq 1$.

<u>Теорема</u> (Даламберов критеријум) Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, тада за $L < 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, а за $L > 1$ дивергира.
За $L = 1$ критеријум је неодлучив.

<u>Доказ</u> Нека је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$. Тада постоји $\varepsilon > 0$ такав да је $L + \varepsilon < 1$. За такав $(\varepsilon > 0)$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ тд $(\forall n \geq n_0)$ важи $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$. Ако узмемо да је $q = L + \varepsilon$, тада је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \left(\frac{b_{n+1}}{b_n},\ b_n = q^n \right) \quad \text{III}$$

геометријски низ

добијамо да на основу поредбеног критеријума

па на основу поредбеног критеријума је полазни ред конвергентан.
Ако је $L > 1$, тада $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ тд $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $(\forall n \geq n_0)$.
па је $a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_{n_0} > 0$ одакле следи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ па није испуњен (ни) потребан услов за конвергенцију.
За $L = 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, па је критеријум неодлучив.

Примјер: Испитати конвергенцију редова

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$, $a>0$

Рјешење: 1. $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n\cdot(n+1)}{n+1}}$

$= e^{-1} < 1$, па ред конвергира

2. $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{a^{n+1}}}{\frac{n^2}{a^n}} = \frac{1}{a} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{a} < 1 \iff a > 1$ ред конвергира, за $0<a<1$ ред дивергира. За $a=1$ имамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ који дивергира јер му општи члан не тежи 0

Теорема (Уопштени ~~Кошијев~~ Даламберов критеријум) Ако је $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, онда ред дивергира.

Теорема (КОШИЈЕВ КРИТЕРИЈУМ) Ако постоји $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, тада:

- за $L<1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира
- за $L>1$ ред дивергира
- за $L=1$ критеријум је неодлучив

Доказ Нека је $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. За $L<1$ постоји $\varepsilon>0$ тд $q = L+\varepsilon < 1$. За такво $\varepsilon>0$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ тд $|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$. Из последње једнакости је $a_n < q^n$, а како ред $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ конвергира за $q<1$ (геометријски ред), на основу поредбеног критеријума I закључујемо конвергенцију полазног реда.

Ако је $L > 1$, тада је $a_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, па ред дивергира јер општи члан не тежи 0.

За $L = 1$, доказ је исти као и за Даламберов критеријум.

Примјер: Испитати конвергенцију редова

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$

Рјешење:

1. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}}$$

$$= e^{-2\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{4}} = e^{-1/2} < 1$$, па ред конвергира

2. $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\cancel{\left(1-\frac{n}{n^2+n+1}\right)^{-\frac{n^2+n+1}{n}}}^{\,e\,\cdot\left(-\frac{n}{n^2+n+1}\right)\cdot n}$$

$$= e^{-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}} = e^{-1} < 1$$, ред конвергира

(Уопштени Кошијев критеријум) Теорема: Ако је $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = L < 1$ тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако је $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, ред дивергира

Редови са члановима произвољног знака

Теорема („Дирихлеов критеријум") Ако је:
- низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничен
- низ $\{b_n\}$ монотон и тежи нули,

тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира.

Примјер: Испитати конвергенцију реда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Рјешење: Ако ставимо $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{n}$ имамо
$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$ $\{b_n\}$ је монотоно опадајући низ па на основу Дирихлеовог става добијамо да полазни ред конвергира.

Теорема (Абелов критеријум) Ако је:
- ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан
- низ $\{b_n\}$ монотон и ограничен,

тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира.

Примјер: Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n tg\frac{1}{n}$

Рјешење: Низ $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ је монотоно растући и ограничен, а на основу Дирихлеовог критеријума ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg\frac{1}{n}$ конвергира, па на основу Абеловог критеријума полазни ред конвергира.

Дефиниција Ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

гдје је $a_n>0$, $(\forall n\in\mathbb{N})$ називамо алтернативни (алтернирајући) ред.

За испитивање конвергенције оваквих редова користи се Лајбницов критеријум.

Теорема (Лајбницов критеријум) Ако низ $\{a_n\}$ монотоно опада и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$, тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ конвергира. За остатак овог реда вриједи

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| < a_{n+1} \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn}(r_n)=(-1)^n$$

Доказ: Како је низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ ограничен, конвергенција слиједи из Дирихлеовог критеријума. Ако означимо $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ и $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$, тада из

$$S_{2n+2}-S_{2n} = a_{2n+1}-a_{2n+2}>0 \quad \text{и} \quad S_{2n+1}-S_{2n-1} = -a_{2n}+a_{2n+1}<0$$

слиједи да је низ $\{S_{2n}\}$ растући, а $\{S_{2n-1}\}$ опадајући. Како су оба низа конвергентна и теже S, добијамо $S_{2n}\le S\le S_{2n+1}$. Тада вриједи

$$|S-S_{2n}| = S-S_{2n} \le S_{2n+1}-S_{2n} = a_{2n+1}$$

$$|S-S_{2n-1}| = S_{2n-1}-S \le S_{2n-1}-S_{2n} = a_{2n}$$

одакле добијамо тврђење.

Пример Испитати конвергенцију реда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad p>0$$

Доказ: За $p>0$ је низ $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n^p}$ монотоно опадајући и $\frac{1}{n^p} \to 0$, па на основу Лајбницовог критеријума конвергира.

Дефиниција: За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да је апсолутно конвергентан ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, али не конвергира апсолутно, кажемо да условно конвергира.

Теорема Ако је ред апсолутно конвергентан, тада је он и ~~апсолутно~~ конвергентан.

Пример: Испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}, \quad p>0$$

Доказ: Апсолутна конвергенција:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$
Овај ред конвергира за $\underline{p>1}$

Обична конверг: Из претходног примера видимо да ред конверг. за $\underline{p>0}$.

Ред условно конвергира за $\underline{0<p\le 1}$.