UNIVERZITET U NOVOM SADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA

OTPORNOST MATERIJALA I

TEORIJA

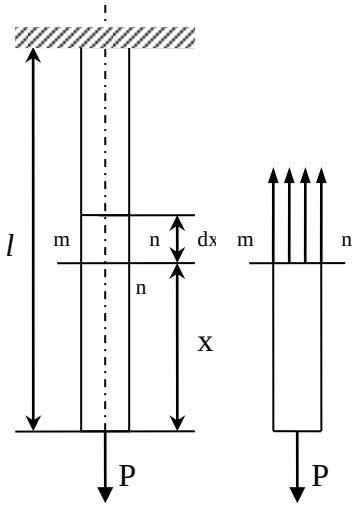
PROF. DR DRAGAN MILAŠINOVIĆ, dig
ALEKSANDAR LANDOVIĆ, dig

2009.

I. AKSIJALNO NAPREZANJE U GRANICAMA ELASTIČNOSTI

1. ELASTIČNOST

Materijalno telo sačinjavaju mali delići ili molekuli povezani unutrašnjim silama. Ove molekularne sile suprostavljaju se promeni oblika tela, koji teže da izazovu spoljne sile kada te spoljne sile napadaju telo, njegovi delići se pomeraju i takva pomeranja traju dok se ne uspostavi ravnoteža između spoljnih i unutrašnjih sila. Za telo se u tom slučaju kaže da je u deformisanom stanju. U toku deformacije tela spoljne sile vrše rad koji se pretvara, potpuno ili delimično, potencijalnu energiju deformacije.



(Slika. 1)

Posmatrajmo, na primer, prizmatičan štap opterećen na kraju, kao što je na slici. Teret će izazvati izesno izduženje štapa. Napadna tačka tereta pomeriće se nadole, a teret, u toku tog kretanja, izvršiće pozitivan rad. Ako se teret smanji, smanjiće se i izduženje štapa. Opterećeni kraj pomeriće se na gore i potencijalna energija pretvoriće se u rad izdizanja tereta.
Svojstvo tela da se vraća svom prvobitnom obliku, po prestanku dejstva tereta, zove se ELASTIČNOST.

2. HOOKE-ov ZAKON

Neposrednim ispitivanjem na zatezanje prizmatičnih štapova, utvrđeno je za mnoge građevinske materijale da je u izvesnim granicama izduženje štapa proporcionalno sili zatezanja. Ona jednostavna linearna zavissnost između sile i njome prouzrokovanog izduženja, formulisana je prvi put kod engleskog naučnika Robert-a Hooke-a 1678.g. Ako uvedemo oznake:
P – sila koja zateže štap,
ℓ – dužina štapa,
A – površina poprečnog preseka štapa,
δ – ukupno izduženje štapa,
E – elastična konstanta materijala – modul elastičnosti
Hooke-ov eksperimentalni zakon može se izraziti sledećom jednačinom:

$$\delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E}$$

Pri proučavanju unutrašnjih sila zamišljamo štap presečen po mn u dva dela i posmatramo ravnotežu njegovog donjeg dela.
Donji deo tog tela napada spoljna sila P. Uticaj delića gornjeg dela napregnutog štapa, na deliće donjeg dela, petstavljaju sile koje napadaju njegov gornji kraj. Ove sile su raspoređene neprekidno po površini poprečnog preseka. Uzevši u obzir da zbir tih sila i uslova ravnoteže mora biti jednak P i beležeći silu na jedinici površine poprečnog preseka sa σ, dobijamo

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (2)$$

Ova sila po jedinici površine zove se napon.
Izduženje po jedinici dužine štapa, dato jednačinom:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \qquad (3)$$

Zove se specifičnim izduženjem ili dilatacijom. Koristeći (2) i (3) možemo predstaviti Hooke-ov zakon u sledećem obliku:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (4)$$

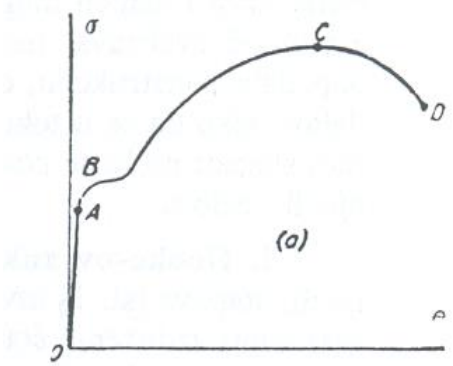
iz kojeg se vidi da je modul elastičnosti jednak naponu podeljenom kroz dilataciju i da se može lako izračunati, kada je ispitivanjem na zatezanje određen napon i odgovarajuća dilatacija. Dilatacija ε je neimenovan broj (jed. 3). Prema tome može se zaključiti iz jed. 4, da modul elastičnosti ima istu dimenziju kao i napon σ $[kn/\mathrm{m}^{2,}$ kPa, MPa, GPa $]$ ili samo Pa. kPa=10^3Pa, MPa=10^6Pa, GPa=10^9Pa.

Jednačine(1)-(4) možemo korititi takođe i za pritisnute prizmatične štapove. Tako će δ biti ukupno uzdužno skraćenje, ε specifično skraćenje, a σ napon pritiska.

3. DIJAGRAM ISPITIVANJA NA ZATEZANJE

Proporcionalnost između izduženja i sile zatezanja postoji samo do izvesnegranične vrednosti napona zatezanja, koja se zove GRANICA PROPORCIONALNOSTI, a zavisi od svojstva materijala. Pri proučavanju mehaničkih osobina materijala izvan granice proporcionalnosti, zavisnost deformacije od napona se obično prikazuje DIJAGRAMOM ISPITIVANJA NA ZATEZANJE. Ovde su izduženja uzeta za apcise, a napon za ordinate krive OABCD.

A – granica proporcionalnosti



(sl.2)

U tački B javlja se naglo izduženje štapa skoro bez povećanja sile zatezanja. Ova pojava, koja se zove TEČENJE materijala, prikazana je skoro horizontalnim delom krive.

Napon, koji odgovara tački B, zove se GRANICOM RAZVLAČENJA. Pri daljem istezanju štapa sila zatezanja raste zajedno sa izduženjem do tačke C, gde ona dostiže maksimalnu vrednost. Dotični napon zove se JAČINOM KIDANJA MATERIJALA. Iza tačke C javlja se izduženje štapa uz smanjenje tereta i kidanje materijala nastupa pod teretom koji odgovara tački D materijala.

4. DOPUŠTENI NAPON

Dijagram ispitivanja na zatezanje daje vrlo važne podatke o mehaničkim osobinama materijala. Kad znamo granicu proporcionalnosti, granicu tečenja i način kidanja materijala, može se za svaki pojedini tehnički problem izabrati ona vrednost napona koja odgovara sigurnosti konstrukcije. Ovaj se napon zove obično DOPUŠTENIM NAPONOM.

Da bi se konsrukcija radila u elastičnom području, a da bi se isključila mogućnost stalnih (trajnih) deformacija obično se bira znatno niži dopušteni napon od granice proporcionalnosti. Ako obeležimo sa:

σ_w – dopušteni napon,

$\sigma_{y.p.}$ – granica razvlačenja,

σ_u – granica kidanja,

onda veličinu dopuštenog napona određujemo sa jednom od dve jednačine:

$$\sigma_w=\frac{\sigma_{y.p.}}{n} \quad \text{ili} \quad \sigma_w=\frac{\sigma_u}{n1}$$

Brojem n i n1, obično se zovu KOEFICIJENTI SIGURNOSTI.

5. NAPREZANJE ŠTAPA SOPSTVENOM TEŽINOM

Pri proučavanju zatezanja štapa (sl.1) uzeli smo u obzir uticaj tereta P na karaju štapa. Kod štapova veće dužine njihova sopstvena težina može izazvati znatne dopunske napone, te se mora uzeti u obzir. U tom slučaju najveći napon je u gornjem učvršćenom poprečnom preseku. Ako obeležimo sa γ težinu jedinice zapremine štapa, njegova ukupna težina biće $A \cdot y \cdot \ell$, a najveći napon odrediće se jednačinom:

$$\sigma \max = \frac{P + A \cdot \gamma \cdot \ell}{A} = \frac{P}{A} + \gamma \cdot \ell \qquad (6)$$

Težina dela štapa iznad poprečnog preseka mn, uzetog u odstojanju x od donjeg kraja (sl.1), je $A \cdot y \cdot x$, te će napon u tom preseku biti:

$$\sigma = \frac{P + A \cdot \gamma \cdot x}{A} \qquad (7)$$

Kad zanemarimo σ max u jed.(6), sa dopuštenim naponom σ w, jednačina za određivanje potrebne površine poprečnog preseka biće:

$$A = \frac{P}{\sigma_w - \gamma \cdot \ell} \qquad (8)$$

Kada je $\gamma \cdot \ell = \sigma w$, tj. kada napon izazvan samo težinom štapa postaje jednak dopuštenom naponu, desna strana jed.(8) teži beskonačnosti. U takvim prilikama je nemogućno koristiti prizmatičan oblik štapa, mora se uzeti štap promenjivog preseka.
Izduženje elemnta dižine dx je:

$$d\delta = \frac{\sigma}{E} \cdot dx = \frac{P + A \cdot \gamma \cdot x}{A \cdot E} \cdot dx$$

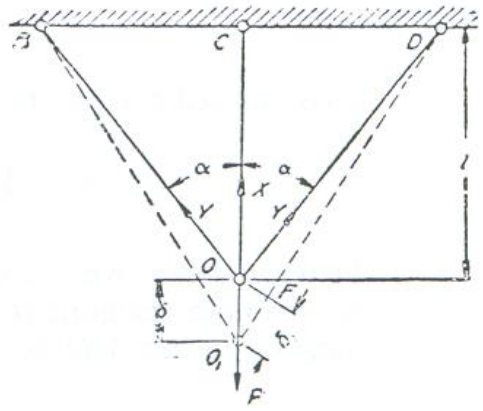
a ukupno izduženje dobivano sabiranjem izduženja svih takvih elemenata, tj.

$$\delta = \int_o^{\ell} \frac{P + A \cdot \gamma \cdot x}{A \cdot E} \cdot dx = \frac{\ell}{A \cdot E}\left(P + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \ell\right)$$

Iz uporođenja ove jednačine sa jed.(1) vidimo da je ukupno izduženje, izazvano sopstvenom zežinom štapa, jednako izduženju koje bi izazvao teret jednak polovini njegove zežine, kad bi delovao na kraju.

6. STATIČKI NEODREĐENI ZADACI ZA AKSIJELNO NAPREZANJE

Ima slučajeva kada se aksijalne sile u štapovima konstrukcije ne mogu odrediti samo iz jednačina statike, te se mora uzeti u obtir deformacija konstrukcije. Takve konstukcije zovu se STATIČKI NEODREĐENIM SISTEMIMA.



Na sl.3. prikazan je sistem od tri štapa OB, OC i OD, koji su u istoj ravni, koje zateže sila P. uslovi ravnoteže zgloba O daju dve jednačine statike, koje nisu dovoljne za određivanje triju nepoznatih sila zatezanja u štapovima; da bi se dobila treća jednačina mora se posmatrati deformacija sistema.

$$\sum y = 0$$
$$x + 2 \cdot y \cdot \cos\alpha = P \qquad \text{(a)}$$

Da bismo izveli drugu jednačinu, potrebnu za određivanje nepoznatih veličina x i y, moramo posmatrati deformisani oblik sistema prikazan na slici isprekidanim linijama.

δ je ukupno izduženje vertikalnog štapa pod teretom P, a δ_1

(sl.3) kosih štapova. δ_1 se može naći iz trougla OFO_1. Pretpostavljajući da su ova izduženja vrlo mala, kružni luk OF sa središtem u D, možemo zameniti uprvanom tetivom, a ugao u O_1 možemo uzeti jednakim početnom uglu α.

Tada je:

$$\delta_1 = \delta \cdot \cos\alpha$$

Specifična izduženja i napon u vertikalnom i kosim štapovima biće

$$\varepsilon_s = \frac{\delta}{\ell}, \sigma_s = \frac{E_s \cdot \delta}{\ell}, \varepsilon_c = \frac{\delta \cdot \cos^2\alpha}{\ell}, \sigma_c = \frac{E_c \cdot \delta \cdot \cos^2\alpha}{\ell}$$

Tada će se sile u štapovima dobiti množenjem napona sa površinama poprečnih preseka

$$X = \sigma_s \cdot A_s = \frac{A_s \cdot E_s \cdot \delta}{\ell}, Y = \sigma_c \cdot A_c = \frac{A_c \cdot E_c \cdot \delta \cdot \cos^2\alpha}{\ell} \qquad \text{(b)}$$

odakle je

$$Y = X \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{A_c \cdot E_c}{A_s \cdot E_s}$$

Kad uvrstimo taj izraz u jed.(a) dobivamo:

$$X = P - 2 \cdot Y \cdot \cos\alpha = P - 2 \cdot X \cdot \cos^3\alpha \cdot \frac{A_c \cdot E_c}{A_s \cdot E_s},$$

$$X\left(1 + 2 \cdot \cos^3\alpha \cdot \frac{A_c \cdot E_c}{A_s \cdot E_s}\right) = P, X = \frac{P}{1 + 2 \cdot \cos^3\alpha \cdot \frac{A_c \cdot E_c}{A_s \cdot E_s}} \qquad (10)$$

Vidi se da sila X zavisi ne samo od ugla nagiba α, nego i od poprečnih preseka i mehaničkih osobina materijala štapova. U specijlnom slučaju, kada svi štapovi imaju istu površinu preseka i isti modul, dobijamo iz jed.(10)

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha}$$

Kada α teži nuli, $\cos\alpha$ teži jedinici, a sila u vertikalnom štapu teži $\frac{1}{3} \cdot P$.

Kada α teži 90°, kosi štapovi postaju vrlo dugački i ceo teret nosi srednji štap $(X = P)$.

7. POČETNA I TERMIČKA NAPREZANJA

U statički neodređenim sistemima mogu se pri montaži pojaviti početni naponi, izazvani netačnostima u dužinama štapova ili namernim odstupanjima od tačnih vrednosti tih dužina. Ovi naponi postoje i kada nema spoljnih tereta, a zavise samo od geometrijskog oblika sistema, od mehaničkih osobina materijala i od veličina odstupanja. Neka je na primer kod sistema na sl.3, vertikalnom štapu poprečno data dužina $\ell + a$, umesto ℓ. U tom slučaju, posle montaže štapova BO i DO, vertikalnni štap može doći na svoje mesto, samo posle prethodnog skraćenja, koje će izazvati zatezanje u kosim štapovima. Neka je X sila zatezanja $\frac{X}{2 \cdot \cos\alpha}$, u kosim štapovima; pomeranje zgloba O, usled tog istezanja, biće(vidi jed.(b),6)

$$\delta = \frac{X \cdot \ell}{2 \cdot A_c \cdot E_c \cdot \cos^3 \alpha} \qquad \text{(a)}$$

Skraćenje vertikalnog štapa biće

$$\delta_1 = \frac{X \cdot \ell}{A_s \cdot E_s} \qquad \text{(b)}$$

Iz elementarnog, geometrijskog rasuđivanja vidi se da pomeranje zgloba O, zajedno sa skraćenjem vertikalnog štapa, mora biti jednako grešci a u dužini vertikalnog štapa. Odavde nalazimo sledeću jendačinu za određivanje X

$$\frac{X \cdot \ell}{2 \cdot A_c \cdot E_c \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{X \cdot \ell}{A_s \cdot E_s} = a$$

odakle je

$$X = \frac{a \cdot A_s \cdot E_s}{\ell \cdot \left(1 + \frac{A_s \cdot E_s}{2 \cdot A_c \cdot E_c \cdot \cos^3 \alpha}\right)} \qquad (11)$$

Sada se može naći početni napon u svakom od štapova.

Izduženje štapova sistema usled promene temperature može imati isto dejstvo kao i netačnosti u dužinama. Pretpostavimo da štap ima učvršćene krajeve, a da se temperatura štapa popela od t_0 do t. otpori na krajevima sprečavaju termičko izduženje štapa i stvaraju u njemu napon pritiska, koji možemo naći iz uslova da je dužina ostala nepromenjena. Neka je α koeficijenttermičkog širenja, a σ napon pritiska izazvan otporima. Tada će se σ odrediti iz jednačine:

$$\alpha \cdot (t - t_0) = \frac{\sigma}{E},$$

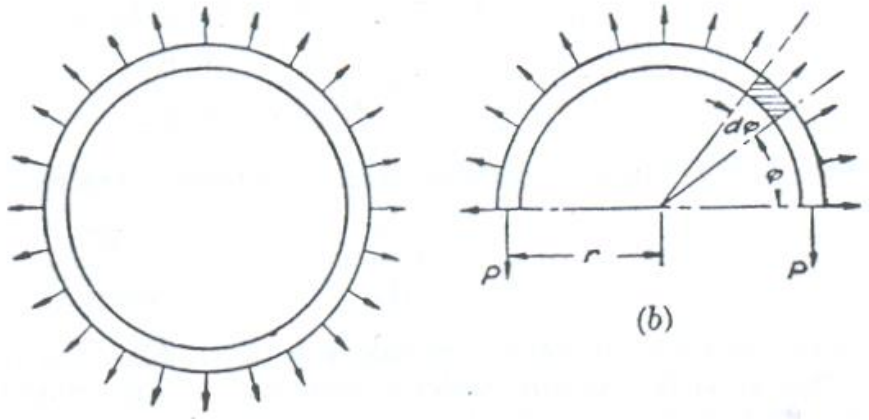
odakle je:

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot (t - t_0) \qquad (12)$$

Kao drugi primer posmatrajmo sistem, prikazan na sl.3, i pretpostavimo da je vertikalni štap zagrejan od temperature t_0 do temperature t. dva ostala štapa sistema delimično sprečavaju izduženje, koje bi odgovaralo tom porastu temperature, te se javlja napon pritiska u vertikalnom štapu i napon zatezanja u kosim štapovima. Veličina sile pritiska u vertiklnom štapu može se odrediti iz jed.(11), gde umesto odstupanja a u dužini, treba uneti termičko izduženje $\alpha \cdot \ell \cdot (t - t_0)$ vertikalnog štapa.

8. ZATEZANJE KRUŽNOG PRSTENA

Kada obim tankog kružnog prstena sl.4. napadaju jednoliko raspoređene radijalne sile, javlja se jednoliko istezanje tog prstena.



(sl.4)

Da bismo našli silu zatezanja P u prstenu, zamislimo prsten presečenim po horizontalnom prečniku(sl.4b) i posmatrajmo gornji deo kao slobodno telo. Ako je q intezitet opterećenja po jedinici dužine srednje linije prstena, a r poluprečnik te linije, sila koja napada element prstena ograničen sa dva bliska radijalna preseka, biće $q \cdot r \cdot d\varphi$, gde $d\varphi$ odgovarajući centralni ugao. Uzimajući zbir vertikalnih komponenata svih sila, koje napadaju polovinu prstena, dobijamo sledeću jednačinu ravnoteže:

$$2P = 2\int_0^{\pi/2} q \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = 2 \cdot q \cdot r$$

odakle je:

$$P = q \cdot r \qquad (13)$$

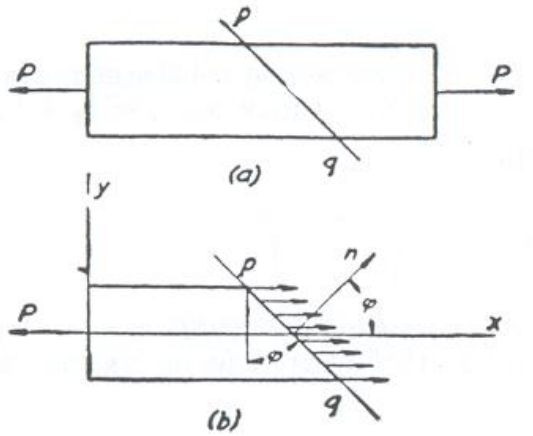
Napon zatezanja u prstenu dobijamo, kad podelimo silu P površinom poprečnog preseka.

II. ANALIZA NAPONA I DEFORMACIJA

9. ZAVISNOST NAPONA OD POLOŽAJA PRESEKA ZA SLUČAJ AKSIJALNOG NAPREZANJA

Pri dosadašnjem proučavanju napona u aksijalno zategnutom prizmatičnom štapu silom P posmatrali smo samo napone u poprečnom preseku upravnom na osu štapa. Uzmimo sada presek pq (sl.5) upravan na ravan slike, a nagnut prema osi.

Pošto sva udužna vlakna imaju isto izduženje, sile, koje predstavljaju uticaj desnog dela štapa na levi, raspoređuju se jednoliko po preseku pq. Levi deo štapa, prikazan odvojeno na (sl.5b), je u ravnoteži pod dejstvom tih sila i spoljne sile P, koja napada levi kraj. Odavde sledi da je rezultanta sile koje napadaju presek pq jednaka P.



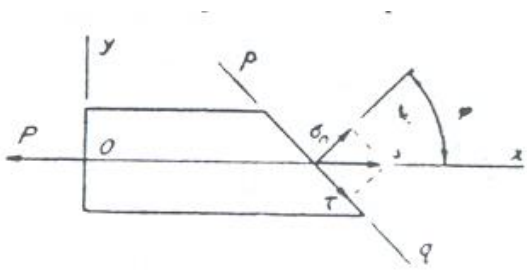
(sl.5)

Ako je A površina poprečnog preseka upravnog na osu štapa, a φ ugao između te ose i normale i na presek pq, površina preseka pq je $A/\cos\varphi$ i napon u tačkama tog preseka je

$$S = \frac{P \cdot \cos\varphi}{A} = \sigma_x \cdot \cos\varphi \qquad (16)$$

Gde je $\sigma_x = P/A$ napon u poprečnom preseku upravnom na osu štapa.

Vidi se da je napon u preseku nagnut prema osi štapa manji od napona σ_x u preseku upravnom na tu osu i da se smanjuje kada ugao φ raste. Kada je $\varphi = \pi/2$, presek pq postaje paralelan sa osom štapa, a napon postaje nula, što znači da između uzdužnih vlakana štapa nema pritiska.



(sl.6)

Napon s, određen je jed.(16), ima pravac sile P, te nije upravan na ravan preseka pq. U takvim slučajevima obično se ukupan napon razlaže na dve komponente, kao što je prikazano na sl.6. komponentni napon σ_n upravan na ravan preseka zove se normalni napon. On je jednak:

$$\sigma_n = s \cdot \cos\varphi = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi \qquad (17)$$

Tangencijalna komponenta τ zove se napon smicanja i jednak je:

$$\tau = s \cdot \sin\varphi = \sigma_x \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi \qquad (18)$$

Iz jednačine (17) vidi se da je najveći normalni napon deluje u preseku upravnom na osu štapa, tako da je

$$(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x$$

Najveći napon smicanja, kao što se to vidi iz jed.(18), deluje u preseku nagnutom za 45° prema osi štapa, kada je $\sin 2\varphi = 1$, i taj napon ima vrednost

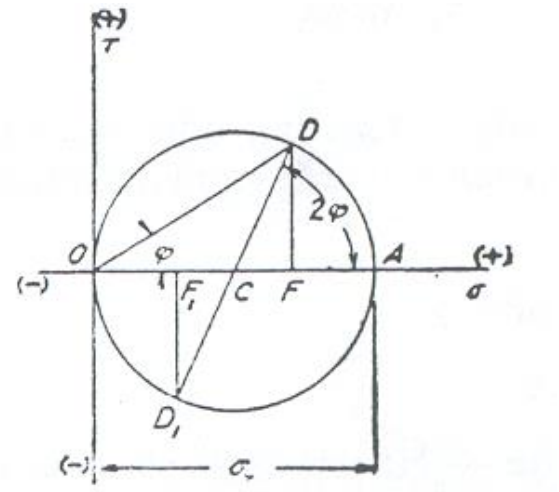
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \qquad (19)$$

Iako je najveći napon smicanja dvaput manji od najvećeg normalnog napona on je ponekada merodavan pri posmatranju materijala, koji su manje otporni u pogledu smicanja, nego u pogledu

zatezanja. Na primer, pri ispitivanju na zatezanje štapa od mekanog čelika sa poliranom površinom, razvlačenje metala vidi se golim okom javljajući se duž nagnutih ravnim kojima je napon smicanja najveći, kada sila P dostigne vrednost, koja odgovara tački B, na sl.2. To znači da kod mekanog čelika kidanje izaziva najveći napon smicanja, iako je taj napon svega polovina nejvećeg normalnog napona.
Obrasci (17) i (18), izvedeni za zatezanje štapa, mogu se primeniti i na slučaj pritiska. Napon zatezanja smatra se pozitivnim, a napon pritiska negativnim.

10. KRUG NAPONA

Obrasci (17) i (18) mogu se predstaviti grafički (O.Mohr) 1882. Uzećemo ortogonalni koordinatni sistem sa početkom u O i sa pozitivnim smerom osa, sl.7. Počinjemo sa presekom pq upravnim na osu štapa za koji je $\varphi = o$, (sl.6) i prema obrascima (17) i (18) $\sigma_n = \sigma_x, \tau = 0$ (tačka A na apcisi).



(sl.7)

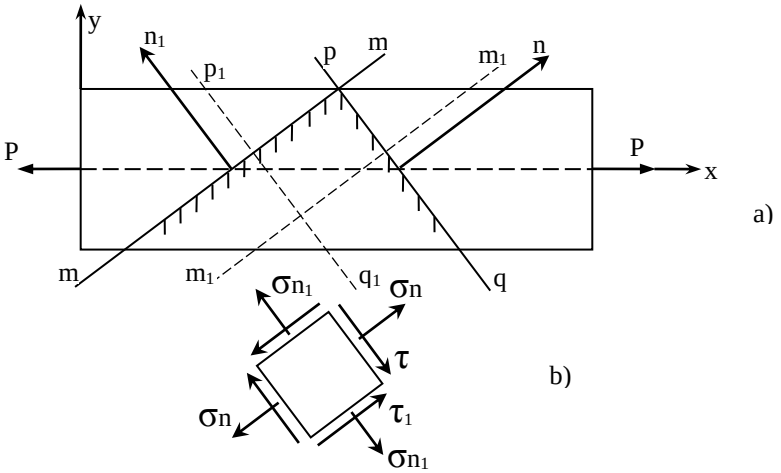
Uzimajući sada ravan paralelnu osi štapa, imamo $\varphi = \pi/2$, i kako su za tu ravan obe komponente napona jednake nuli, zaključujemo da početak O odgovara toj ravni. Ako nacrtamo sada krug(c) sa prečnikom $\overline{OA}$ može se dokazati da će komponente napona za neki presek pq sa proizvoljno izabranim uglom φ biti predstavljene koordinatama tačke tog kruga. Da bismo našli tačku kruga koja odgovara datom uglu φ, treba izmeriti u smeru suprotnom kazaljci na satu od tačke A luk koji odgovara uglu 2φ. Neka je tačka D nađena na taj način.

Tada možemo pročitati sa slike da je:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x + \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \cos \cdot 2\varphi = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi,$$

$$\overline{OF} = \overline{CD} \cdot \sin \cdot 2\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \sin 2\varphi$$

Iz upoređenja ovih izraza za koordinate tačke D sa izrazima (17) i (18) vidimo da ta tačka određuje napone u ravni pq (sl.6). Kada se presek pq okreće u smislu suprotnom kazaljci na satu (sl.6); φ se menja od 0 do $\pi/2$, tačka D se okreće od A do O, tako da gornja polovina kruga određuje napone za sve vrednosti φ u tim granicama. Ako je ugao φ veći od $\pi/2$, dobijamo presek prikazan na sl.8 a, koji čini ravan mm sa spoljnom normalom n_1, koja zaklapa sa X osom ugao veći od $\pi/2$. Ako izmerimo opet u smislu suprotnom kazaljci luk od tačke A sl.7. koji odgovara uglu 2φ, dobićemo tačku na donjoj polovini kruga.



(sl.8)

Posmatrajmo, na primer, slučaj kada je mm upravna na presek pq koji smo posmatrali ranije. Tom slučaju odgovara tačka D_1 na krugu (sl.7.), tako da je DD_1 prečnik kruga. Uzevši koordinate tačke D_1 nalazimo komponente napona σ_{n1} i τ_1 za ravan mm.

$$\sigma_{n1} = \overline{OF_1} = \overline{OC} - \overline{F_1C} = \frac{1}{2}\cdot\sigma_x - \frac{1}{2}\cdot\sigma_x\cdot\cos 2\varphi = \sigma_x\cdot\sin^2\varphi, \tag{20}$$

$$\tau_1 = -\overline{F_1D_1} = -\overline{CD_1}\cdot\sin 2\varphi = -\frac{1}{2}\cdot\sigma_x\cdot\sin 2\varphi \tag{21}$$

Kada uporedimo ove rezultate sa jed.(17) i (18) nalazimo:

$$\sigma_n + \sigma_{n1} = \sigma_x\cdot\cos^2\varphi + \sigma_x\cdot\sin^2\varphi = \sigma_x\ , \tag{22}$$

$$\tau_1 = -\tau \tag{23}$$

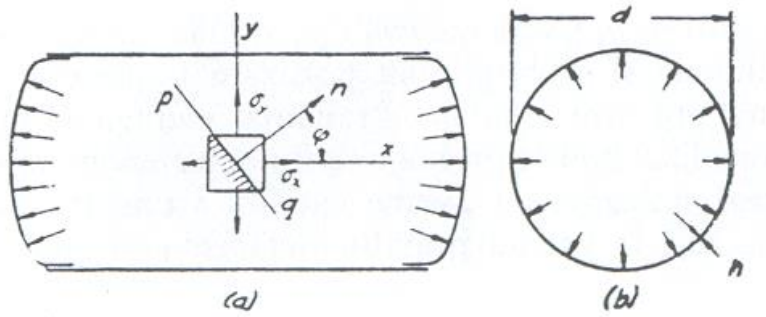
Odavde se vidi da je zbir normalnih napona, koji deluju na dvema uzajamno upravnim ravnima, konstantan i jednak σ_x. Naponi smicanja u takvim ravnima su po veličini jednaki, ali suprotnog znaka.

Uzevši susedne preseke m_1m_1 i p_1q_1 paralelne mm i pq sl.8b, možemo izdvojiti element gde su pokazani i smerom napona koji ga napadaju. Vidi se da napon smicanja na stranama elementa paralelni ravni pq stvaraju spreg u smislu kazaljke, koji se prema usvojenom pravilu mora smatrati pozitivnim (pozitivan znak za smicanje je usvojen kada ti naponi obrazuju spreg u smislu kazaljke na satu, a negativan u slučaju suprotnog smisla). Naponi smicanja na dvema ostalim stranama elementa stvaraju spreg suprotnog smisla.

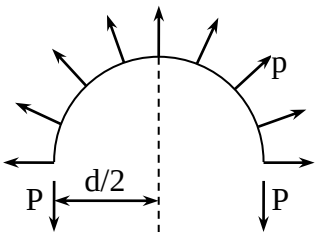
Krug, prikazan na sl.7., zove se KRUG NAPONA i služi za određivanje komponentalnih napona σ_n i τ u preseku pq, čija normala zatvara proizvoljni ugao φ sa X osom (sl.6). Slična konstrukcija može se koristiti za rešenje obrnutog zadatka, kada su dati komponentni napon σ_n i τ, a treba naći napon zatezanja σ_x u pravcu ose i ugao φ. Vidimo da je ugao, koji zatvara tetiva OD sa X osom, jednak φ (sl.7). Odavde, kad konstruisemo tačku D sa koordinatama σ_n i τ, nalazimo ugao φ, ako povučemo pravu OD. Kada znamo ugao φ, može se nacrtati poluprečnik CD koji zatvara ugao 2φ sa osom OC i dobija se središte C kruga napona. Prečnik ovoga kruga daje traženi napon σ_x.

11. NAPREZANJE U DVA PRAVCA

Ima slučajeva kada je u nekoj konstrukciji materijal istovremeno zategnut ili pritisnut u dva uzajamno upravna pravca. Kao primer takvog naprezanja posmatrajmo napone u cilindričnom zidu kotla napregnutog unutrašnjim pritiskom p. isecimo mali element tog zida sa dva bliska preseka upravna na osu i dva paralelna njoj (sl.9). Unutrašnji pritisak izazvaće zatezanje cilindričnog lima u pravcu ose i u kružnom smislu. <u>Napon zatezanja</u> u kružnom smislu odrediće se na isti način, kao i u slučaju kružnog prstena sl.4. Obeležimo unutrašnji prečnik kotla sa d, a debljinu lima sa h.



(sl.9)

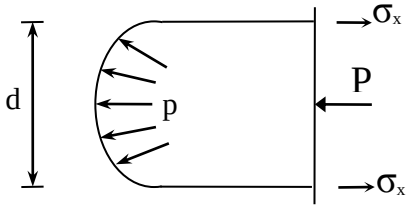


$$P = p \cdot \frac{d}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{P}{h \cdot 1} = \frac{p \cdot d}{2 \cdot h}$$

$$\sigma_y = \frac{p \cdot d}{2 \cdot h} \qquad (24)$$

Za određivanje napona zatezanja σ_x u pravcu ose zamislimo kotao presečen upravno na X osu. Posmatrajući ravnotežu jednog dela kotla, vidimo da je sila, koja izaziva uzdužno istezanje kotla, jednaka rezultanti pritiska na dno, tj.



$$P = p \cdot A_{dna} = p \cdot \frac{d^2 \pi}{4}$$

Poprečni presek cilindričnog lima je približno(debljina h se smatra malom u poređenju sa unutrašnjim prečnikom kotla d.)

$$A = O \cdot h = d \cdot \pi \cdot h$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{p \cdot d}{4 \cdot h} \qquad (25)$$

Jasno je da element cilindričnog lima deluju naponi zatezanja σ_x i σ_y u dva upravna pravca i da je napon σ_y u kružnom smislu dvaput veći od napona σ_x u aksijalnom pravcu.

Posmatrajmo sad napon u preseku pq (sl.9a) upravnom na ravan XY, a čija normala u zaklapa ugao φ sa X osom. Iz izraza (17) i (18) vidimo da napon zatezanja σ_x u pravcu ose stvara u ravni pq normalni napon i napon smicanja.

$$\sigma_n' = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi \ , \qquad \tau' = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \sin 2\varphi \qquad (a)$$

Za određivanje napona, izazvanih u istoj ravni pq naponom zatezanja σ_y i normale n (sl.9a), je $\pi/2 - \varphi$ i da se meri u smislu kazaljke na satu od y ose, dok se φ meri u suprotnom smislu od X ose. Iz tog vidimo da pri primeni jed.(17) i (18) treba u ovom slučaju zameniti σ_x sa σ_y i φ sa -$\left(\pi/2 - \varphi\right)$. Tada nalazimo:

$$\sigma_n'' = \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi \ , \qquad \tau'' = -\frac{1}{2} \cdot \sigma_y \cdot \sin 2\varphi \qquad (b)$$

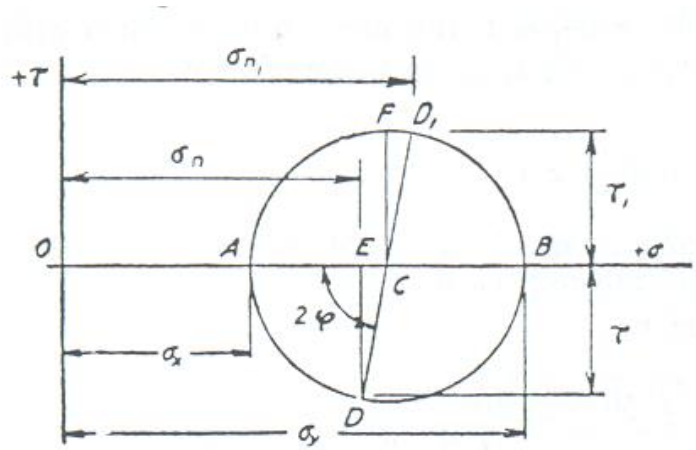
Sabirajući komponentalne napone (a) i (b), koji odgovaraju σ_x, odnosno σ_y, rezultujući normalni napon i napon smicanja za slučaj zatezanja u dva upravna pravca dobijamo u obliku:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi \qquad (26)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_x - \sigma_y\right) \cdot \sin 2\varphi \qquad (27)$$

12. KRUG NAPONA ZA SLOŽENO NAPREZANJE

Na isti način, kao što je to bilo učinjeno u čl.10, možemo predstaviti grafički izrazr (26) i (27), pomoću kruga napona. Pretpostavivši opet da apcise i ordinate prikazuju u izvesnoj razmeri normalni napon i napon smicanja, možemo zaključiti da tačke A i B (sl.10) sa apcisama jednakim σ_x i σ_y predstavljaju napone na stranama elementa (sl. 9a), upravnim na X odnosno Y osu. Da bi smo našli komponentne napone za kosi presek, određen uglom φ na sl.9.a, treba da nacrtamo krug sa prečnikom AB i povučemo poluprečnik CD, koji zatvara ugao ACD jednak 2φ pri merenju od tačke A u smislu suprotnom kazaljci na satu. Sa slike je:



(sl.10)

$$\overline{OE} = \overline{OC} - \overline{CE} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{OB}-\overline{OA}\right)\cdot\cos 2\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_y-\sigma_x\right)\cdot\cos 2\varphi = \sigma_x\cdot\cos^2\varphi + \sigma_y\cdot\sin^2\varphi$$

Time je dokazano da apcisa $\overline{OE}$ tačke kruga D izmerena u izabranoj razmeri daje normalnu komponentu napona σ_n, jed.(26).

Ordinata tačke D je

$$\overline{DE} = \overline{CD}\cdot\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\cdot\left(\sigma_y-\sigma_x\right)\cdot\sin 2\varphi$$

Kako se ova ordinata mora uzeti sa negativnim znakom, zaključujemo da ordinata tačke D uzeta sa pravim znakom daje napon smicanja(27).

Kada se ravan pq okreće u smislu kazaljke oko ose upravne na ravan XY (sl.9a), odgovarajuća tačka D se kreće u smislu suprotnom kazaljci duž kruga napona (sl.10), tako da se za svaku vrednost φ mogu naći vrednosti komponentnih napona σ_n i τ koje njoj odgovaraju, kao koordinate tačke D.

Iz ove grafičke predstave obrazaca (26) i (27) odmah sledi da je najveći normalni napon u našem slučaju jednak σ_y, a da je najveći napon smicanja, prikazan poluprečnikom CD kruga na sl.10, jednak:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \qquad (28)$$

i odgovara vrednosti $\sin 2\varphi = -1$, ondosno $\varphi = \frac{3}{4}\cdot\pi$

U ravni za koju je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ javlja se napon smicanja iste veličine ali suprotnog smera.

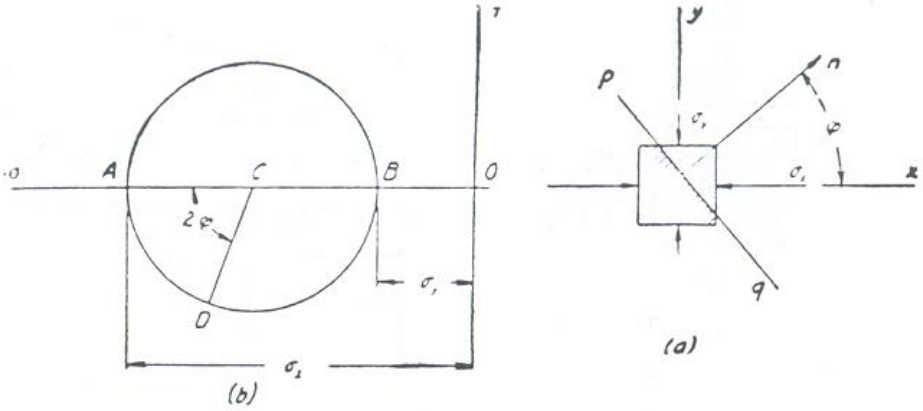
Ako uzmemo dve uzajamno upravne ravni određene uglovima φ i $\frac{\pi}{2}+\varphi$, koje njihove normale n i n_1 zatvaraju sa X osom, komponentni napon u tim ravnima biće određeni koordinatama tačaka D i D_1 na sl.10, i prema tome:

$$\sigma_n + \sigma_{n1} = \sigma_x + \sigma_y \qquad (29)$$

$$\tau_1 = -\tau \qquad (30)$$

Odavde se vidi da se zbir normanih napona, koji napadaju dve uzajamno upravne ravni, ne menja pri promeni ugla φ. Naponi smicanja u dvema uzajamno upravnim ravnima imaju istu veličinu, ali suprotan znak.

Krug napona, sličan prikazanom na sl.10, može se nacrtati i za slučaj kada su jedan ili oba napona σ_x i σ_y naponi pritiska; treba samo odmeriti napone pritiska na negativnoj apcisnoj osi. Na primer, za slučaj napona, koji je prikazan na sl.11a, krug napona je predstavljen na sl.11b.



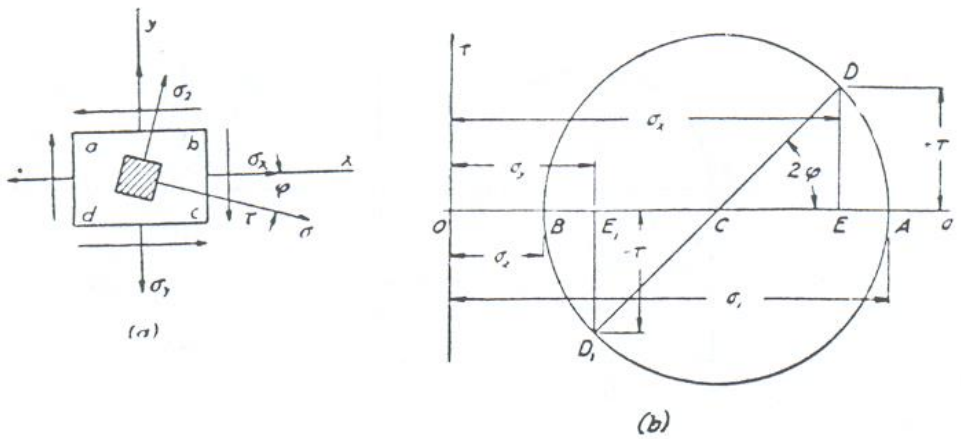
(sl.11)

Komponentni napon za ravan pq sa normalom n dati su koordinatama tačke D dijagrama.

13. GLAVNI NAPON

U prethodnom članu bilo je prikazano da u slučaju tatezanja ili pritiska u dva upravna pravca X i Y jedan od dva napona σ_x *ili* σ_y je najveći, a drugi je najmanji normalni napon. U svim nagnutim ravnima, kao što su ravni pq na sl.9a) i sl.11a), veličina normalnog napona σ_n nalazi se između tih graničnih vrednosti. U isto vreme se u svim nagnutim ravnima sem normanih napona σ_n javljaju takođe i naponi smicanja τ. Takvi naponi kao što su σ_x i σ_y od kojih je jedan najveći, a drugi najmanji normalni napon, zovu se GLAVNI NAPONI, a one dve ravni u kojima oni deluju – GLAVNE RAVNI. U tim ravnima nema napona smicanja.

U primeru gornjeg člana (sl.9) glavni napon su bili određeni na osnovu vrlo jednostavno razlaganja, a trebalo je naći izraze za komponente normalnog napona i napona smicanja u nakoj kosoj ravni, kao što je ravan pq na sl.9a. U daljem izlaganju (čl.29) imaćemo slučajeve obrnutog problema. Mogućno je odrediti napon smicanja i normalni napon za dve upravne ravni. Najjednostavniji put za rešavanje ovog zadatka daje krug napona koji smo posmatrali na sl.10. Zamislimo da su naponi na stranama elementarnog pravougaonog paralelopipeda abcd prikazani na sl. 12a.



(sl.12)

Naponi σ_x i σ_y nisu glavni naponi, jer u ravnima upravnim na X i Y ose sem normalnih napona deluju i naponi smicanja. Da bismo nacrtali krug napona za ovaj slučaj koristimo prvo komponentne napone σ_x , σ_y i τ i nalazimo tačke D i D_1, prikazane na sl.12b. kako te dve tačke predstavljaju napone u dvema upravn9im ravnima, dužina DD_1, treba da bude prečnik kruga napona. Njegov presek sa X osom određuje središte C kruga, tako da se sada krug može nacrtati. Tačke preseka A i B kruga sa X osom određuju veličine najvećeg i najmanjeg napona, koji su glavni napon i obeležavaju se sa σ_1 i σ_2. Sve slike imamo:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad (31)$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad (32)$$

a može se tražiti da se nađu veličine i pravci glavnih napona.

Pravci glavnih napona mogu se takođe naći iz slike. Znamo da je ugao DCA dvaput veći od ugla koji zaklapa napon σ_1 sa X osom, a kako se 2φ meri od D prema A u smislu kazaljke, pravac σ_1 mora biti onaj, prikazan na sl.12a. Ako izdvojimo element koji je na slici šrafiran, na stranama paralelnim i upravnim na σ_1, na strane tog elementa delovaće samo normalni napon σ_1 i σ_2. Za izračunavanje brojne vrednosti ugla imamo iz slike:

$$|tg\,2\varphi| = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}$$

Što se tiče znaka ugla φ, on mora biti u datom slučaju negativan, jer se meri od X ose u smislu kazaljke (sl.12a). Odavde je:

$$tg\,2\varphi = -\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(33)

Najveći napon smicanja je dat veličinom poluprečnika kruga napona:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

(34)

Jednačine (31)-(34) potpuno rešavaju problem određivanja najvećeg normalnog i najvećeg napona smicanja, ako su dati normalni naponi i naponi smicanja za dve upravne ravni, jer je krug određen dvema tačkama na krajevima prečnika.

14. ANALIZA DEFORMACIJE U SLUČAJU AKSIJALNOG NAPREZANJA

U čl.2 proučili smo izduženje zategnutog štapa. Eksperimenti dokazuju da je takvo aksijalno izduženje uvek praćeno poprečnim skraćenjem štapa i da je odnos specifičnog skraćenja, prema specifičnom aksijalnom izduženju za sati štap i dati materijal stalan u granicama elastičnosti. Ova konstanta beleži se sa μ i poznata je kao POISSON-ov koeficijent,po francuskom matematičaru koji je analitički utvrdio vrednost te konstante, polazeći od molekularne hipoteze o strukturi materijala. Za materijale koji imaju iste elastične osobine u svim pravcima, tzv. IZOTROPNE MATERIJALE, Poisson je našao $\mu = \frac{1}{4}$; Eksperminetalna proučavanja poprečnog skraćenja građevinskog metala pokazuju da obično μ nije daleko od vrednosti koju je izračunao Poisson. Na primer, za građevinski čelik može se uzeti $\mu = 0{,}30$. Kada znamo Poisson-ov koeficijent materijala možemo izračunati promenu zapremine zategnutog štapa. Dužina štapa će se povećati u odnosu $(1+\varepsilon):1$. Poprečne dimenzije se smanjuju u odnosu $(1-\mu\cdot\varepsilon)^2:1$. Dakle, zapremina štapa se menja u odnosu $(1+\varepsilon)\cdot(1-\mu\cdot\varepsilon)^2:1$, koji postaje:
$(1+\varepsilon-2\mu\cdot\varepsilon):1$, ako se setimo da je ε mali broj i zanemarimo njegove stepene. Na taj način ZAPREMINSKA DILATACIJA je $\varepsilon\cdot(1-2\mu)$. Teško se može pretpostaviti da neki materijal pri istezanju smanjuje svoju zapreminu; mora μ dakle, biti manje od 0,50. Za takve materijale, kao što je guma i parafin μ se približava toj granici, te se njihova zapremina pri istezanju skoro ne menja. Sa druge strane, takvi materijali kao što je beton imaju malu vrednost $\mu\left(\frac{1}{8}\text{ do }\frac{1}{2}\right)$, a za plutu može se smatrati da je $\mu = 0$.
Slična razlaganja o poprečnom skraćenju mogu se primeniti i na slučaj pritiska. Podužni pritisak biće propraćen poprečnim širenjem i za izračunavanje tog širenja može se uzeti ista vrednost μ kao i u slučaju istezanja.

15. DEFORMACIJA PRI NAPREZANJU U DVA MEĐUSOBNO UPRAVNA PRAVCA

Ako je štap oblika pravouglog paralelopipeda zategnut silama u dva uzajamno upravna pravca X i Y izduženje u jednom od tih pravaca zavisi ne samo od napona u tom pravcu, nego i od napona u upravnom pravcu. Specifično izduženje u pravcu x ose usled napona σ_x biće $\sigma_x|E$. Napon σ_y izazvaće poprečno skraćenje u pravcu X ose jednako $\mu\cdot\sigma_y|E$. Ako oba napona σ_x i σ_y deluju istovremeno, specifično izduženje u X pravcu biće:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_y}{E} \tag{35}$$

Analogno u Y pravcu imamo:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_x}{E} \tag{36}$$

Kontrakcija paralelopipeda u Z pravcu biće:

$$\varepsilon_z = -\mu\cdot\frac{\sigma_x}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\mu}{E}\cdot(\sigma_x+\sigma_y) \tag{37}$$

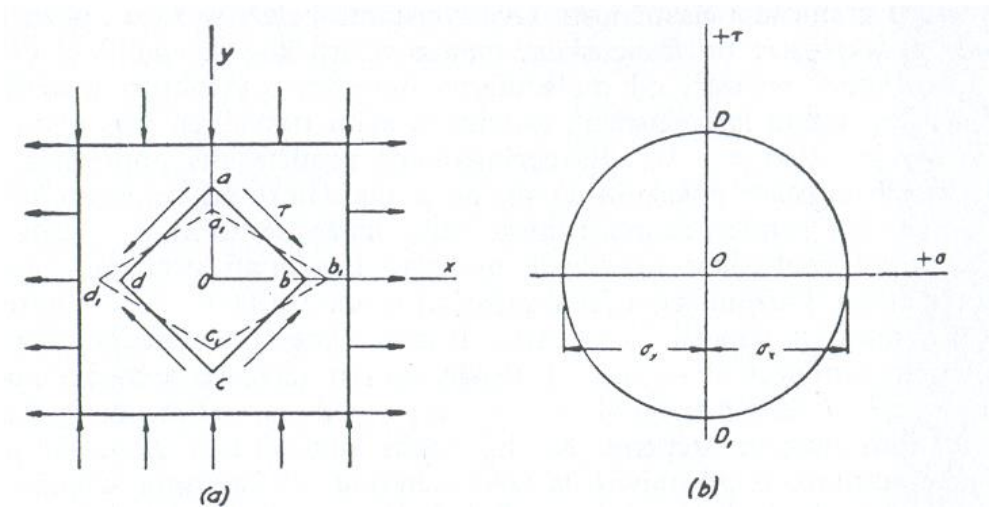
Pomoću jednačina (35) i (36) mogu se naponi σ_x i σ_y predstaviti kao funkcije spcifičnih izduženja ε_x i ε_y:

$$\sigma_x = \frac{(\varepsilon_x+\mu\cdot\varepsilon_y)\cdot E}{1-\mu^2}\ ,\quad \sigma_y = \frac{(\varepsilon_y+\mu\cdot\varepsilon_x)\cdot E}{1-\mu^2} \tag{38}$$

Ako se u slučaju prikazanom na sl. 9a izduženje ε_x u aksijalnom pravcu i izduženje ε_y u kružnom smislu izmerena ekstenzometrom, naponi σ_x i σ_y koji njima odgovaraju mogu se odrediti iz jed.(38).

16. ČISTO SMICANJE. MODUL SMICANJA

Posmatrajmo specijalan slučaj naprezanja u dva upravna pravca, kada je napon zatezanja σ_x u horizontalnom pravcu po apsolutnoj vrednosti jednak naponu pritiska σ_y u vertikalnom pravcu (sl.13a).



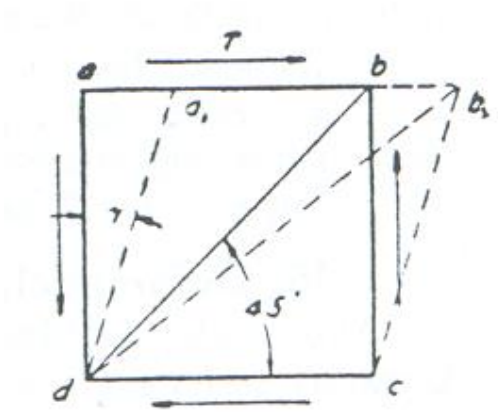
(sl.13)

Tome odgovara krug napona prikazan na sl.13b. Tačka D kruga predstavlja napone u ravnima ab i cd upravnim na ravan XY, a nagnutim za 45° pema X osi. Tačka D_1 predstavlja napone u ravnima ad i bc upravnim na ad i cb. Iz kruga napona vidimo da je normalni napon u svakoj od tih ravni nula, i da je napon smicanja u istim ravnima, predstavljen poluprečnikom kruga, brojno jednak normalnom naponu σ_x, tako da je:

$$\tau = \sigma_x - \sigma_y \qquad \text{(a)}$$

Ako zamislimo da je izdvojen element abcd, on će biti u ravnoteži pod uticajem samo napona smicanja, kao što je pokazano na sl13a. Ta vrsta naprezanja zove se ČISTIM SMICANJEM. Može se zaključiti da je čisto smicanje ekvivalentno naprezanju na zatezanje u jednom pravcu i na isto toliki pritisak u upravnom pravcu. Ako bi pravougaoni element bio izdvojen, slično elementu abcd na sl.13a, ali ravnima koje zatvaraju sa X osom ugao različit od 45°, na stranam tog elementa javili bi se ne samo naponi smicanja, već i normalni naponi. Veličina tih napona može se dobiti iz kruga napona (sl.13b) na uobičajen način.

Posmatrajmo sada deformaciju elemnta abcd. Kako na stranama tog elementa nema normalnih napona, dužine ab, ad, bc i cd se ne menjaju pri deformaciji, ali horizontalna dijagonala bd se izdužuje, a vertikala ac se skraćuje, pretvarajući kvadrat abcd u romb, kao što je prikazano na slici neprekidnom linijom.



(sl.14)

Ugao u d koji je bio pre deformacije $\frac{\pi}{2}$ sada postaje manji od $\frac{\pi}{2}$, recimo $\frac{\pi}{2}-\gamma$; u isto vreme ugao u a se povećava i postaje jednak $\frac{\pi}{2}+\gamma$. Mali ugao γ određuje deformaciju elementa abcd, on se zove SMICANJEM ILI KLIZANJEM.

Klizanjem se može pregledno predstaviti na sledeći način. Element abcd (sl.13a) okrenut je smislu suprotnom kazaljci na 45° i stavljen u položaj prikazan na sl.14. Posle deformacije izazvane naponima smicanja τ, ovaj element zauzima položaj prikazan isprekidanim linijama. Smicanje, predstavljano malim uglom γ, može se smatrati jednakim odnosu $\overline{aa_1}/\overline{ad}$, tj jednakim horizontalnom klizanju aa_1 strane ab u odnosu na stranu dc, podeljeno rastojanjem između tih dveju strana. Ako za materijal važi Hooke-ov zakon, ovo klizanje je proporcionalno naponu τ, te se odnos između napona smicanja i klizanja može predstaviti jednačinom:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}\ , \qquad (39)$$

gde je G konstanta koja zavisi od mehaničkih osobina materijala. Jed.(39) je slična jed.(4) izvedenoj za aksijalno naprezanje, a konstanta G zove se MODULOM KLIZANJA ili MODULOM SMICANJA.

Kako je deformacija elementa abcd (sl.14) potpuno određena izduženjem dijagonale bd i skraćenjem dijagonale ac, koju možemo naći iz jednačina prethodnog člana, treba zaključiti da se modul G može izraziti pomoću modula zatezanja E i Poisson-ovog koeficijenta μ. Da bismo uspostavili tu zavisnost posmatrajmo trougao aOb (sl.13a).

Izduženje strane Ob i skraćenje strane Oa tog trougla usled deformacije možemo naći iz jed.(35) i (36). Pomoću dilatacija ε_x i ε_y možemo izračunati:

$$Ob_1 = Ob\cdot(1+\varepsilon_x) \quad , \quad Oa_1 = Oa\cdot(1+\varepsilon_y)$$

a iz trougla Oa_1b_1

$$tg\cdot(Ob_1a_1) = tg\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{Oa_1}{Ob_1} = \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_x} \qquad (b)$$

Za mali ugao γ imamo takođe:

$$tg\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg\cdot\frac{\pi}{4}-tg\cdot\frac{\gamma}{2}}{1+tg\cdot\frac{\pi}{4}\cdot tg\cdot\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}} \qquad (c)$$

Kako je za čisto smicanje:

$$\sigma_x = -\sigma_y = \tau$$

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = (1+\mu)\cdot\frac{\sigma_x}{E} = (1+\mu)\cdot\frac{\tau}{E}$$

to, izjednačivši izraze (b) i (c), nalazimo

$$\frac{1-(1+\mu)\cdot\frac{\tau}{E}}{1+(1+\mu)\cdot\frac{\tau}{E}}=\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}},$$

odakle je:

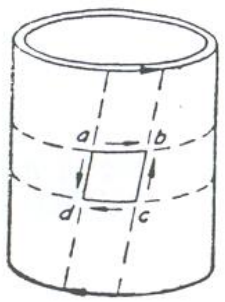
$$\frac{\gamma}{2}=(1+\mu)\cdot\frac{\tau}{E}, \quad \text{ili} \quad \gamma=2\cdot(1+\gamma)\cdot\frac{\tau}{E}$$

Kad uporedimo ovaj rezultat sa obrascem (39), vidimo da je:

$$G=\frac{E}{2\cdot(1+\gamma)} \tag{40}$$

Kao što se vidi, modul klizanja(smicanja) može se lako naći, ako su poznati modul zatezanja E i Poisson-ov koeficijent μ.

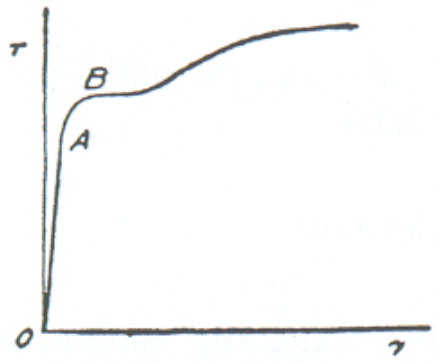
Treba primetiti da je vrlo teško ostvariti čisto smicanje onako, kako je ono predstavljeno na sl.14, tj. u obliku napona smicanja na stranama kocke. Zato se uslovi čistog smicanja ostvaruju obično torzijom kružne cevi (sl.15). Pri malom okretanju jednog kraja cevi u odnosu na drugi, izvodnice cilindrične površine naginju se i element abcd ograničen sa dve izvodnice(cilindrične površine naginju se) i sa dva bliska poprečna preseka nalazi se u stanju čistog smicanja, slično onom na sl.13. Problem torzije biće proučen kasnije. Tamo će biti pokazano kako se mogu odrediti napon τ i smicanje γ elementa abcd, ako se može izmeriti ugao torzije vratila, koji odgovara datom momentu torzije. Kada su iz takvog eksperimenta nađeni τ i γ, vrednosti modula G može se naći iz jed.(39), Ako je poznat modul elastičnosti E iz ispitivanja na zatezanje, onda pomoću nađene vrednosti G se može sračunati Poisson-ov koeficijent μ iz jed.(40). Međutim, neposredno određivanje μ merenjem poprečnog skraćenja pri ispitivanju na zatezanje se teže ostvaruje, jer je to skraćenje vrlo malo i za njegovo merenje potrebni su vrlo osetljivi instrumenti.



(sl.15)

17. DOPUŠTENI NAPON SMICANJA

Kada se za neki materijal ostvari stanje čistog smicanja (sl.15), može se eksperimentalno utvrditi zavisnost između napona smicanja i klizanja. Takva zavisnost se obično prikazuje dijagramom (sl.16), gde su apcise klizanja, a ordinate naponi smicanja. Ovaj dijagram je sličan onome za istezanje i na njemu se takođe mogu primetiti granica proporcionalnosti A i granica tečenja B. Ogledi pokazuju da je za takve materijale, kao što je valjani čelik, granica tečenja τ_{yp} samo 0,55 do 0,65 od σ_{yp}. Kako se pri tečenju materijala javlja znatna deformacija bez osetne promene napona, logično je uzeti za dopušteni napon smicanja jedan deo granice tečenja. tako da je:



(sl.16)

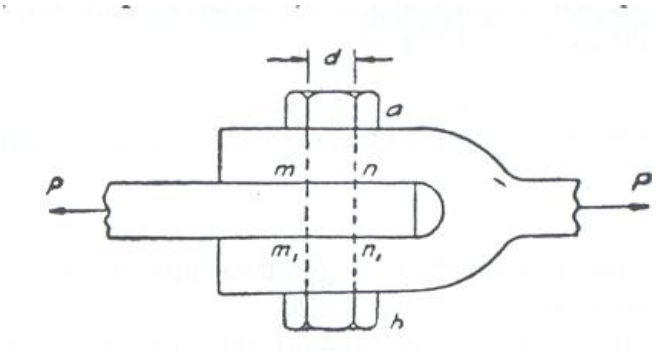
$$\tau_w=\frac{\tau_{yp}}{n} \tag{41}$$

gde n koeficijent sigurnosti. Uzevši za taj koeficijent istu vrednost kao i za aksijalno naprezanje, dobićemo:

$$\tau_w=0{,}55 \text{ do } 0{,}60\cdot\sigma_w,$$

što znači da se dopušteni napon smicanja mora uzeti znatno manji od dopuštenog napona zatezanja.

Ima mnogo praktičnih zadataka, gde se rešenje dobija iz pretpostavke o čistom smicanju, iako je to samo gruba aproksimacija. Uzimamo, na primer, spoj prikazan na sl.17. Očikledno je da će se spoj raskinuti usled smicanja u presecima mn i m_1n_1 šipke ab ako prečnik zavrtnja nije dovoljno velik. Iako tačnije proučavanje problema pokazuje da naponi smicanja nisu jednoliko raspoređeni po porečnim presecima i da je zavrtanj pri dejstvu sile P napregnut ne samo na smicanje već i na savijanje, može se za dimenzionisanje prečnika zavrtnja, kao gruba aproksimacija, pretpostaviti da u ravnima mn i m_1n_1 deluju jednoliko raspoređeni naponi τ koje nalazimo delenjem sile P zbirom površina preseka mn i m_1n_1.



(sl.17)

Odavde je:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} \quad ; \quad \tau = \frac{P}{2A}$$

$$2A = \frac{d^2\pi}{2} \quad ; \quad \tau = \frac{2P}{d^2\pi} \qquad \tau = \frac{2P}{d^2\pi}$$

i traženi prečnik dobija se iz jednačine:

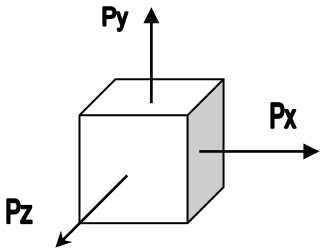
$$\tau_w = \frac{2P}{d^2\pi}$$

Drugi primer takvog uprošćavanja problema smicanja predstavlja proučavanje zakovaka(sl.18). Kako su glave zakivaka napravljene na vvisokoj temperaturi, pri njihovom hlađenju stvara se veliki pritisak između ploča. Kada deluju sile zatezanja P, trenje između ploča prouzrokovano gore navedenim pritiskom, sprečava njihovo relativno pomeranje. Tek kada je trenje savladano, počinju zakivci da rade na smicanje i može se javitiraskidanje usled smicanja zakivaka duž ravni mn i m_1n_1, ako njihov prečnik nije dovoljno velik. Obično se zadovoljava sa grubom aproksimacijom, zanemarujući trenje i pretpostavljajući da su naponi smicanja raspoređeni jednoliko po porečnim presecima mn i m_1n_1. Tada se iz jed.(42) dižobija potrebni prečnik zakivaka, kao u gornjem primeru.

18. NAPREZANJE U TRI PRAVCA

Ako pravougli paralelopiped napadaju sile P_x, P_y, i P_z (sl.18), normalni naponi u poprečnim presecima upravnim na X, odnosno Y i Z ose su:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{P_y}{A_y} \quad ; \quad \sigma_z = \frac{P_z}{A_z}$$



(sl.18)

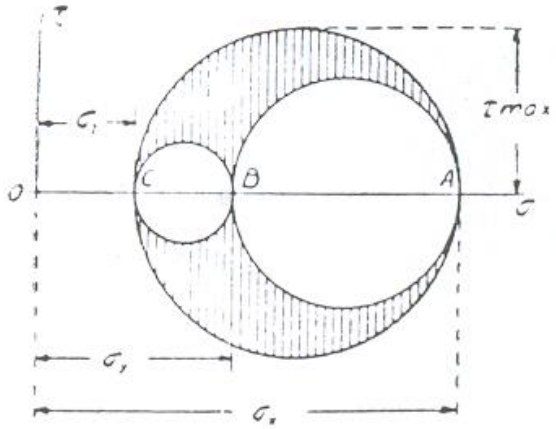
Pretpostavimo da je $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$.

Sabirajući uticaje sila P_x, P_y i P_z, vidimo da u preseku povučenom kroz Y osu napone izazivaju samo sile P_x i P_y i prema tome naponi se mogu odrediti iz jed. (26) i (27) i predstaviti grafički

pomoću kruga napona. Na (sl.19) te napone predstavlja krug sa prečnikom AB. Na isti način krug sa prečnikom BC predstaviće napone u preseku povučenom kroz Y osu. Tri MOHR-ova kruga predstavljaju napone za tri grupe preseka povučenih kroz X, odnosno Y i Z ose.

Za presek nagnut prema X,Y i Z osi naponi su predstavljeni koordinatama tačaka površine, šrafirane na sl.19. Iz toga se može zaključiti da je najveći napon smicanja predstavljen poluprečnikom najvećeg od ova tri kruga i da je $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)$. On se javlja u preseku povučenom kroz Y osu, a koji deli napola ugao između Y i Z osa.

Jednačine za određivanje dilatacija u parvcu X,Y i Z osa mogu se dobiti sabiranjem uticaja sila P_x, P_y i P_z na isti način kao što je to bilo pri proučavanju zatezanja ili pritiska u dva pravca (čl.15).



(sl.19)

Na taj način dobijamo:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\cdot(\sigma_y + \sigma_z)\ ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}\cdot(\sigma_x + \sigma_z)\ ,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}\cdot(\sigma_x + \sigma_y)$$

Zapremina paralelopipeda se povećava u odnosu:

$$(1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z):1\ ,$$

ili, zanemarujući male veličine višeg reda,

$$(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z):1\ ,$$

tako da je zapreminska dilatacija:

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (44)$$

Zavisnost između zapreminske dilatacije i napona nastranama paralelopipeda dobija se sabiranjem jed.(43). Na taj način dobijamo:

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (45)$$

U specijalnom slučaju jednolikog hidrostatičkog pritiska je:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

Tada iz jed.(43) je:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-p}{E}(1-2\mu)\ , \qquad (46)$$

a iz jed.(45) je:

$$\Delta = -\frac{3(1-2\mu)}{E}\cdot p \qquad (47)$$

ili sa oznakom:

$$\frac{E}{3(1-2\mu)} = K \tag{48}$$

biće:

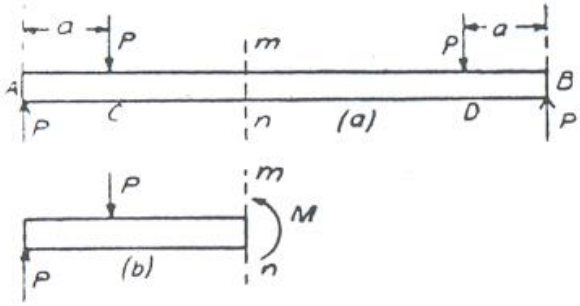
$$\Delta = -\frac{p}{K} \tag{49}$$

Apsloutna veličina zapreminske dilatacije je proporcionalna pritisku p, a obrnuto proporcionalna broju K koji se zove ZAPREMINSKIM MODULOM ELASTIČNOSTI.

III. NAPONI U GREDI IZLOŽENOJ SAVIJANJU

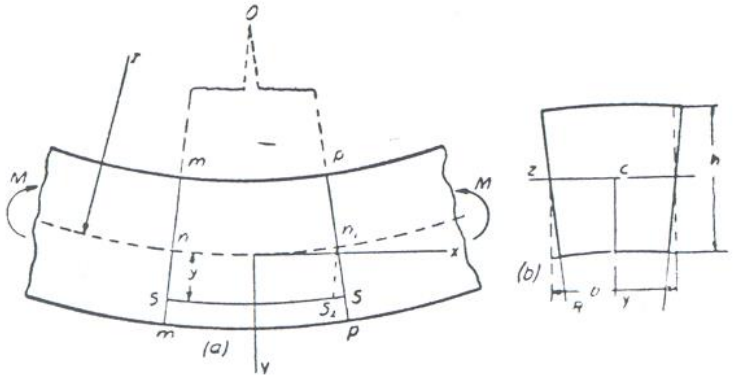
19. ČISTO SAVIJANJE

Veličine napona u poprečnom preseku su određene transverzalnom silom i napadnim momentom u tom preseku. Proučimo prvo jednostavan slučaj izračunavanja tih napona, kada je transerzalna sila jednaka nuli, te se javlja samo napadni moment.



(sl.20)

Ovaj slučaj naprezanja zove se ČISTIM SAVIJANJEM (sl.20). Iz simetrije se vidi da su u tom slučaju reakcije jednake P. Za ravnotežu dela grede levo od preseka mn moraju unutrašnje sile u tom preseku, koje zamenjuju uticaj uklonjenog desnog dela grede, biti statički ekvivalentne spregu jednakom po veličini napdnom momentu, $P \cdot a$ ali suprotnog smisla. Da bismo našli raspodelu tih unurašnjih sila po površini preseka moramo posmatrati deformaciju grede. U jednostavnom slučaju, kada greda ima podužnu ravan simetrije u kojoj deluju spoljni spregovi, savijanje se vrši u toj ravni. Ako je greda pravougaonog preseka i na njenoj bočnoj strani su nacrtane dve vertikalne prave mm i pp, onda, kako pokazuju ogledi, te linije pri savijanju ostaju prave, a okreću se tako da ostanu upravne na uzdužna vlakna grede (sl.21). Teorija savijanja koju dalje izlažemo, osniva se na pretpostavci da pri savijanju ne samo te linije (kao što je mm), ostaju prava, već i ceo poprečni presek grede ostaje ravan i upravan na uzdužna vlakna grede. Eksperimenti potvrđuju da teorija osnovana na ovoj pretpostavci daje vrlo tačne rezultate za ugib grede i za dilataciju uzdužnih vlakana. Iz te pretpostavke sledi da se preseci mm i pp pri savinju okreću jedan prema drugom oko osa upravnih na ravan savijanja, tako da se udužna vlakna na <u>konveksnoj strani grede istežu</u>, a na konkavnoj skraćuju.



(a) (sl.21) (b)

Linija nn_1 je trag one površine čija se vlakna ne deformišu pri savijanju. Ta površina zove se NEUTRALNOM OSOM. Izduženje ss_1 nekog vlakna na ostojanju y od neutralne površine dobija se kad povučemo liniju n_1s_1 paralelno mm (sl.21.a).

Ako obeležimo sa r poluprečnik krivine ose grede, iz sličnosti trouglova non_1 i s_1n_1s' sledi da je dilatacija vlakna ss' jednaka:

$$\varepsilon_x = \frac{s_1 s'}{nn_1} = \frac{y}{r} \qquad (50)$$

Vidimo da su dilatacije uzdžnih vlakana proporcionalne njihovom odstojanju y od neutralne površine, a obrnuto proporcionalne poluprečniku krivine savijene ose grede. Eksperimentalno je utvrđeno da su istezanja vlakana konveksne strane grede praćena POPREČNIM SKRAĆENJEM, a uzdužna skraćenja na konkavnoj strani-poprečnim širenjem, slično onom u slučaju aksijalnog naprezanja. Usled toga se menja oblik preseka, tako da se bočne strane pravougaonog preseka okreću jedna prema drugoj (sl.21.b). Dilatacija u poprečnom pravcu je:

$$\varepsilon_z = -\mu \cdot \varepsilon_x = -\mu \cdot \frac{y}{r} \tag{51}$$

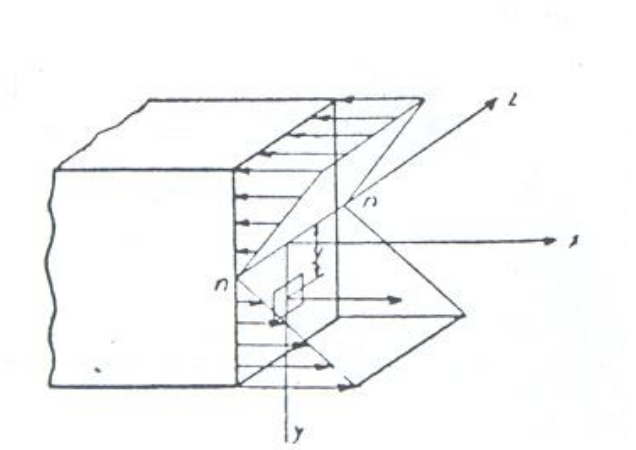
gde je μ Poisson-ov koeficijent. Usled ove deformacije sve prave linije preseka koje su bile paralelne Y osi iskriviće se tako da njihovi krajevi budu upravni na bočne strane preseka. Njihov poluprečnik krivine R je veći od r, a odnos tih poluprečnika je jednak odnosu ε_x prema ε_z, tj.

$$R = \frac{1}{\mu} \cdot r \tag{52}$$

Iz dilatacije uzdužnog vlakna na osnovu Hooke-ovog zakona dobijamo napon u njemu (jed.4):

$$\sigma_x = \frac{E \cdot y}{r} \tag{53}$$

Raspored tih napona je prikazan na sl.22. Napon u nekom vlaknu je proporcionalan njegovom odstojanju od neutralne ose nn. Položaj neutralne ose i poluprečnik krivine r su dve nepoznate u jed. (53), i mogu se sada odrediti iz uslova da se unutrašnje sile, raspoređene po poprečnom preseku grede, redukuju na moment koji bi bio u ravnoteži sa spoljnim momentom M (sl.20) Neka je dA element površine preseka u ostojanju y od neutralne ose (sl.22). Sila koja napada taj element je proizvod napona (jed.53) i površine dA, tj. $(E \cdot y \cdot r) \cdot dA$. Kako se sve sile, raspoređene po poprečnom preseku, moraju redukovati na spreg, mora njihova rezultanta biti jednaka nuli, tj.



(sl.22)

$$\int \frac{E \cdot y}{r} \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot \int y \cdot dA = 0$$

a to znači da je statički moment površine peseka u pogledu neutralne ose nula, odnosno, da NEUTRALNA OSA PROLAZI KROZ TEŽIŠTE POVRŠINE PRESEKA.

Moment sile, koja napada posmatran element, u pogledu neutralne ose je $\left(E \cdot y / r \right) \cdot dA \cdot y$. kada saberemo ovakve momente na celom poprečnom preseku i izjednačimo zbir sa momentom M spoljnih sila, dobiće se jednačina za određivanje poluprečnika krivine r:

$$\int \frac{E}{r} \cdot y^2 \cdot dA - \frac{E \cdot I_z}{r} = M \quad \text{i} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I_z} \tag{54}$$

gde je:

$$I_z = \int y^2 \cdot dA$$

MOMENT INERCIJE površine preseka u pogledu neutralne ose Y. Iz jed.(54) vidi se da je krivina proporcionalna napadnom momentu, a obrnuto proporcionalna broju $E \cdot I_z$ koji se zove KRUTOST GREDE. Eliminacijom r iz jed.(53) i (54) nalazimo sledeću jednačinu za napon:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z} \tag{55}$$

U jed.(55) M je pozitivno, ako je konveksna strana savijene grede upravljena nadole, kao što je sl.21; pozitivan smer y je upravljen nadole.

Gornje izlaganje se odnosi na slučaj pravougaonog preseka. Ali ono važi i za ma koji oblik preseka, ako greda ima podužnu ravan simetrije, a napadnuta je spregovima u toj ravni; u tom slučaju i savijanje se vrši u ravni simetrije, a poprečni preseci ostaju posle savijanja ravni i upravni na uzdužna vlakna.

Najveći naponi zatezanja i pritiska javljaju se u krajnjim vlaknima, to znači da za pravougaoni presek (ili za koji drugi, čije je težište na sredini visine h) odgovaraju $y = \pm h/2$. Tada za pozitivno M dobijamo:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M \cdot h}{2 \cdot I_z} \quad \text{i} \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{M \cdot h}{2 \cdot I_z} \tag{56}$$

kratko će radi koristićemo oznaku:

$$W = \frac{2I_z}{h} \tag{57}$$

Tada je:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W}\ ,\ (\sigma_x)_{\min} = -\frac{M}{W} \tag{58}$$

Veličina W zove se OTPORNIM MOMENTOM preseka grede. Za pravougaoni presek je:

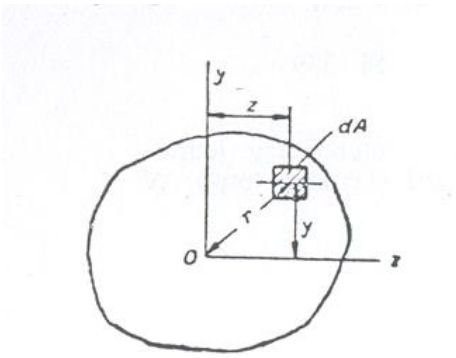
$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}\ ,\ W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Za kružni presek prečnika d je:

$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}\ ,\ W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

20. MOMENT INERCIJE RAVNIH POVRŠINA

I. Moment inercije ravne površine u pogledu ose u njenoj ravni



(sl.23)

Pri proučavanju savijanja greda nailazimo na integrale sledećeg oblika:

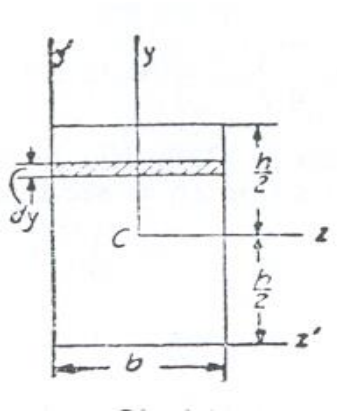
$$I_z = \int_A \cdot y^2 \cdot dA \tag{59}$$

gde se svaki elemnt površine dA množi kvadratom njegova odstojanja od y ose, a integralenje se vrši po površini preseka A grede (sl.23).

Ovakav integral zove se MOMENT INERCIJE površine A u pogledu Y ose. U jednostavnim slučajevima mogu se momenti inercije izračunati neposredno analitički.

Posmatrajmo, na primer, pravougaonik (sl.24). Za izračunavanje momenta inercije površine tog pravougaonika u pogledu horizontalne ose simetrije Z, možemo je podeliti na beskonačne male elemente slične malom pravougaoniku šrafiranom na slici. Tada je:

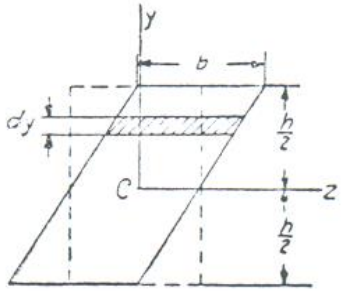
$$I_z = 2 \cdot \int_0^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12} \tag{60}$$



(sl.24)

Na isti način biće moment inercije povrčine tog pravougaonika u pogledu Y ose:

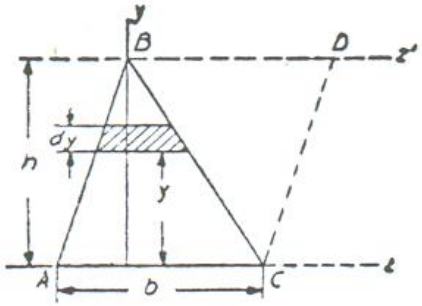
$$I_y = 2 \cdot \int_0^{b/2} z^2 \cdot h \cdot dz = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



(sl.25)

Jed.(60) može se primeniti i na izračunavanje I_z za paralelogram dat na sl.25, jer taj paralelogram nastaje iz pravougaonika prikazanog isprekidanim linijama translatornim pomeranjem, paralelno Z osi, elemenata sličnih elementu šrafiranom na slici. Površina tih elemenata i njihova odstojanja od Z ose ne menjaju se prilikom pomeranja, te je I_z isto toliko kao i za pravougaonik.

Za izračunavanje momenta inercije površina trougla u pogledu osnove (sl.26) površina elementa šrafiranog na slici je:



$$dA = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy$$

(sl.26)

Iz jed.(59) imamo:

$$I_z = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot h^2 \cdot dy = \int_0^h b \cdot y^2 \cdot dy - \int_0^h \frac{b}{h} \cdot y^3 \cdot dy = \frac{4 \cdot b \cdot h^3 - 3 \cdot b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Metoda, razjašnjena na gornjim primerima, može se primeniti u najopštijem slučaju. Moment inercije se dobija podelom površine na beskonačne male trake paralelne osi i integrlenjem prema jed.(59).

Račun se može često učiniti jednostavnim, ako možemo podeliti povržinu na delove čiji su momenti inercije u pogledu date ose poznati. U tom slučaju ukupni moment inercije je zbir momenata inercije svih delova.

Iz same definicije, date jed.(59), sledi da moment inercije površine u pogledu neke ose ima dimenziju dužinme na četvrti stepen; prema tome, kad podelimo moment inercije u pogledu neke ose površinom date figure, dobija se kvadrat neke dužine. Ta se dužina zove POLUPREČNIK INERCIJE u pogledu te ose. Za y i z ose poluprečnici inercije su:

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad (61)$$

<u>II. Polarni moment inercije ravne površine</u>

Moment inercije ravne povrđine u pogledu ose upravne na njenu ravan zove se POLARNI MOMENT INERCIJE u pogledu tačke, gde ta osa seče površinu (tačka O na sl.23) On se definiše kao integral:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA \qquad (62)$$

gde se svaki element površine dA množi kvadratom njegova odstojanja od ose, a integralenje se vrši po ukupnoj površini figure.

Kao što se vidi na sl.23, $r^2 = y^2 + z^2$, te je prema jed.(62):

$$I_p = \int_A \left(y^2 + z^2\right) \cdot dA = I_z + I_y \qquad (63)$$

Dakle, polarni moment inercije u pogledu neke tačke O jednak je zbiru momenata inercije u pogledu dveju uzajamno upravnih osa y i z kroz istu tačku.

Posmatrajmo kružni presek. Ako podelimo površinu kruga na elementarne prstene, kao što je prikazano na sl.27, biće $dA = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr$, to je prema jed.(62):

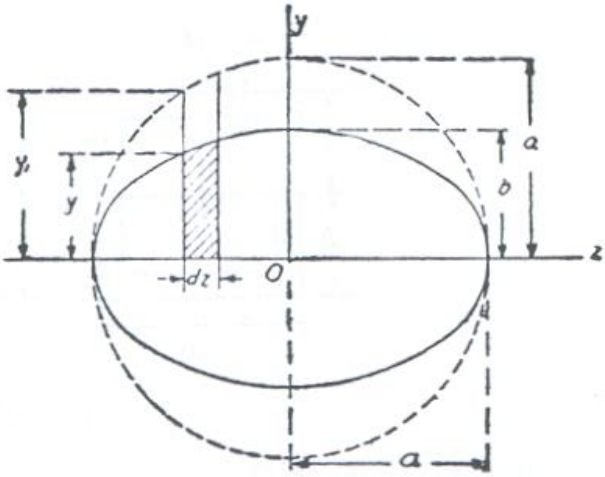
$$I_p = \int_0^{d/2} r^2 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr = 2\pi \cdot \int_0^{d/2} r^3 \cdot dr = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \qquad (64)$$

Iz simetrije se vidi da je u datom slučaju $I_y = I_z$; pa je prema (63) i (64):

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \qquad (65)$$

Moment inercije površine elipse u pogledu glavne ose z (sl.23) može se dobiti upoređenjem te elipse sa krugom prikazanim na slici isprekidanom linijom.

Visina y elmenta površine elipse šrafirane na slici može se dobiti kad smanjimo visinu y_1 odgovarajućeg elmenta kruga u odnosu b/a. Prema jed.(60) momenti inercije ovih dvaju elemenata u pogledu z ose stajaće u odnosu b^3/a^3.



(sl.29)

$$y : b = y_1 : a \qquad y = \frac{b}{a} \cdot y_1 \qquad y^3 = \frac{b^3}{a^3} \cdot y_1^3$$

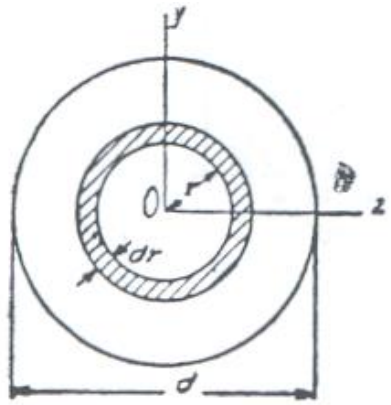
$$I_z = \frac{\pi \cdot (2a)^4}{64} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4} \qquad (66)$$

Na isti način za vertikalni osu nalazimo:

$$I_y = \frac{\pi \cdot ba^3}{4}$$

Polarni moment inercije površine elipse je onda, prema jed.(63):

$$I_p = I_y + I_z = \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{4} + \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4} \qquad (67)$$

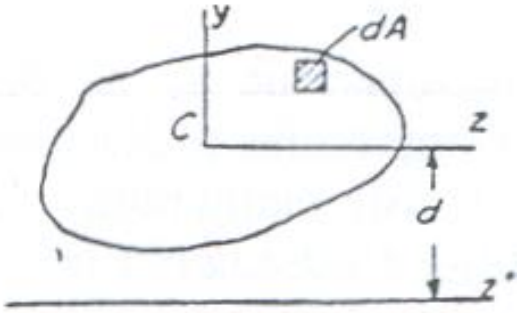


III. Translacija sile

Ako je poznat moment inercije neke površine u pogledu njene težišne ose z (sl.29), može se naći moment inercije u pogledu neke njoj paralelne ose z' iz jednačine:

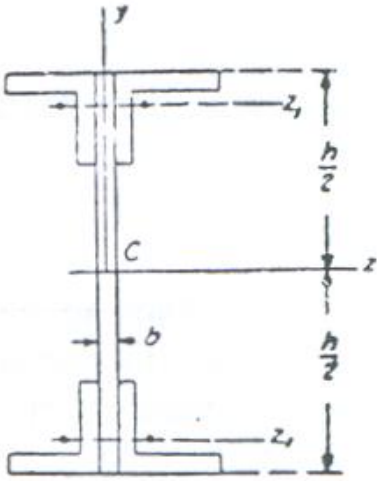
$$I_z' = I_z + A \cdot d^2 \qquad (68)$$

gde je A površina figure, a d rastojanje između osa. To se može dokazati na sledeći način, prema jed.(59):



$$I_z' = \int_A (y+d)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2\int_A y \cdot d \cdot dA + \int_A d^2 \cdot dA$$

(sl.29)



Prvi integral na desnoj strani je I_z, treći je jednak $A \cdot d^2$, a drugi integral je jednak nuli, jer je z težišna osa. Na taj način se jednačina svodi na (68). Jed.(68) je naročito korisna za iztačunavanje momenata inercije složenih preseka grede (sl.30).

Položaj težišta standardnih ugaonika i momenti inercije njihovih preseka u pogledu težišnih osa dati su u priručnicima. Translacijom ose može se izračunati moment inercije takvog složenog preseka grede u pogledu z ose.

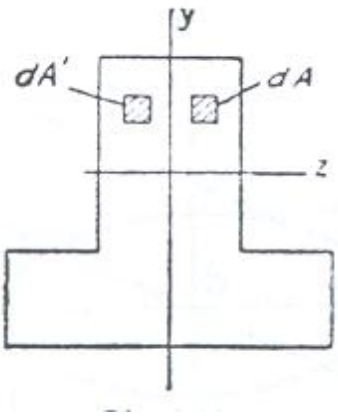
(sl.30)

IV. Centrifugalni momenti glavne ose

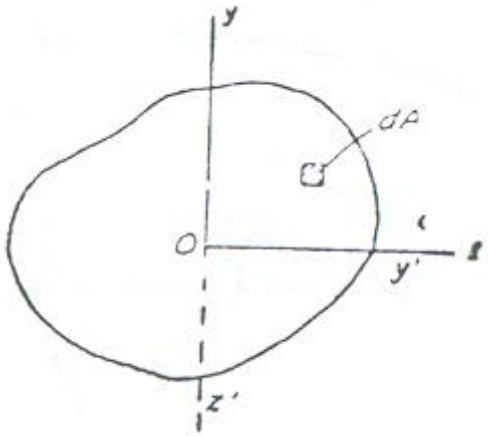
Integral oblika

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA \qquad (69)$$

gde se svaki element površine množi proizvodom svojih koordinata, a integraljenje obuhvata ukupnu površinu A ravne figure zove se CENTRIGUGALNI MOMENT te površine.



(sl.31)



(sl.32)

Ako je jedna od koordinatnih osa, osa simetrije figure (sl.31), centrigulni moment je jednak nuli. Zaista, u tom slučaju svakom elementu kao što je dA sa pozitivnim y odgovara jednak simetričan element dA' sa negativnim z. Prema tome odgovarajući elementarni proizvodi se potiru i integral(69) postaje nula.

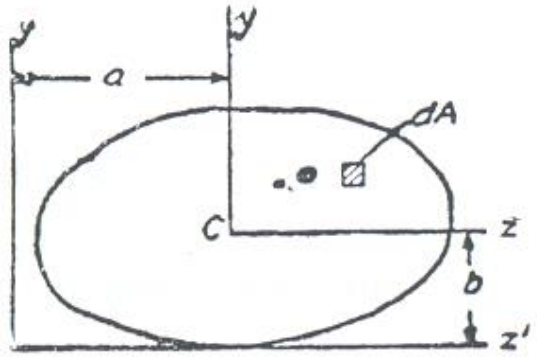
U opštem slučaju, za svaku tačku neke ravne površine možemo uvek naći dve ortogonalne ose za koje je centifugalni moment nula. Uzmimo, na primer, ose y i z na sl.32. Ako okrenemo te ode oko tačke O za 90° u smislu kazaljke na stau, novi položaj osa y' i z' biće inaj prikazan na slici. Tda između starih i novih koordinata elementa dA postoji zavisnost.

$$y' = z \quad ; \quad z' = -y$$

Prema tome, centrigugalni moment za novi koordinatni sistem biće:

$$I_{y'z'} = \int_A y' \cdot z' \cdot dA = -\int_A y \cdot z \cdot dA = -I_{yz}$$

a to znači da centrifugalni moment pri tom okretanju osa menja znak. Kako se centifugalni moment menja neprekidno pri promeni ugla okretanja mora postojati ugao za koji je on jednak nuli. Odgovarajući pravci se zovu GLAVNE OSE. Obično je početak koordinata u težištu površine, tada se te ose zovu GLAVNE TEŽIŠNE OSE. Ako figura ima osu simetrije, onda su ta osa i osa upravna na nju glavne ose figure, jer je centrifugalni moment u pogledu tih osa jednak nuli, kao što je već bilo objašnjeno.



(sl.33)

Ako je poznat centrifugalni moment za ose y i z (sl.33) sa početkom u težištu, centrifugalni moment za paralelne im ose y' i z' određuje se jednačinom:

$$I_{y'z'} = I_{yz} + A \cdot a \cdot b \qquad (70)$$

koordinate elementa dA u novom sistemu su:

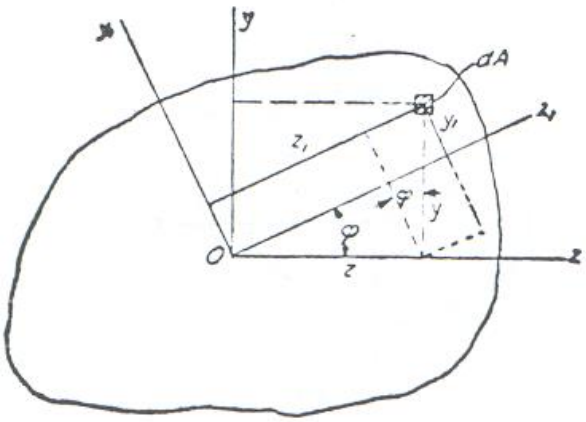
$$y' = y + b \ ; \ z' = z + a$$

Odavde je:

$$I_{y'z'} = \int_A y' \cdot z' \cdot dA = \int_A (y+b) \cdot (z+a) \cdot dA = \int_A y \cdot z \cdot dA + \int_A a \cdot b \cdot dA + \int_A y \cdot a \cdot dA + \int_A z \cdot b \cdot dA$$

Posldnja sva integrala jednaka su nuli, jer je C težište površine, te se jednačina svodi na (70).

<u>V. Okretanje osa. Određivanje pravaca glavnih osa</u>



(sl.34)

Pretpostavimo da su poznati momenti inercije

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \ , \ I_y = \int_A z^2 \cdot dA \qquad (a)$$

i

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA \qquad (b)$$

a treba naći ove veličine za nove koordinate ose y_1 i z_1 (sl.34). Za elementarnu površinu dA nove koordinate su:

$$z_1 = z \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi \ ;$$
$$y_1 = y \cdot \cos\varphi - z \cdot \sin\varphi \qquad (c)$$

gde je φ ugao između z i z_1.

Tada je:

$$I_{z1}=\int_A y_1^2\cdot dA=\int_A (y\cdot\cos\varphi-z\cdot\sin\varphi)^2\cdot dA=\int_A y^2\cdot\cos^2\varphi\cdot dA+\int_A z^2\cdot\sin^2\varphi\cdot dA-\int_A 2\cdot y\cdot z\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot dA$$

ili kad primenimo (a) i (b):

$$I_{z1}=I_z\cdot\cos^2\varphi+I_y\cdot\sin^2\varphi-I_{yz}\cdot\sin 2\varphi \qquad (71)$$

Na isti način nalazimo:

$$I_{y1}=I_z\cdot\sin^2\varphi+I_y\cdot\cos^2\varphi+I_{yz}\cdot\sin 2\varphi \qquad (72)$$

Ako napišemo zbir i razliku jed.(71) i (72), biće:

$$I_{z1}+I_{y1}=I_z+I_y\ , \qquad (73)$$

$$I_{z1}-I_{y1}=(I_z-I_y)\cdot\cos 2\varphi-2\cdot I_{yz}\cdot\sin 2\varphi \qquad (74)$$

Ove jednačine su vrlo korisne za izračunavanje I_{z1} i I_{y1}. Za izračunavanje I_{y1z1} imamo:

$$I_{y1z1}=\int_A y_1\cdot z_1\cdot dA=\int_A (y\cdot\cos\varphi-z\cdot\sin\varphi)\cdot(z\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi)\cdot dA=$$

$$\int_A y^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot dA-\int_A z^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot dA+\int_A yz\cdot(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot dA\ ,$$

ili kad primenimo (a) i (b):

$$I_{y1z1}=(I_z-I_y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi+I_{yz}\cdot\cos 2\varphi \qquad (75)$$

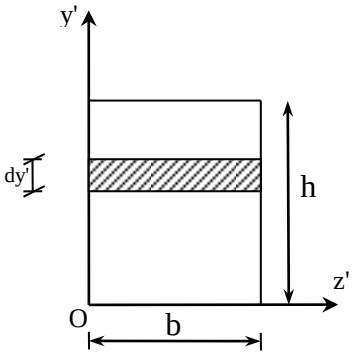
Glavne ose inercije su dve ortogonalne ose ua koje je centrifugalni moment nula, prema tome ose y_1 i z_1 na sl.34 biće glavne ose, ako desna strana jed.(75) bude jednaka nuli

$$(I_z-I_y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi+I_{yz}\cdot\cos 2\varphi=0\ ;$$

odavde nalazimo:

$$tg\,2\varphi=\frac{2\cdot I_{yz}}{I_y-I_z} \qquad (76)$$

Jed.(76) može da bude dobijena i diferciranjem jed.(71) po φ i ako dobijeni izraz izjednačimo sa nulom. Ovo pokazuje da momenti inercije za glavne ose imaju maksimalnu i minimalnu vrednost. Odredimo, na primer, pravce glavnih osa za teme pravougaonika:



(sl.35)

$$dA=b\cdot dy'$$

$$I_{z'}=\int_A y'^2\cdot dA=\int_0^h y'^2\cdot b\cdot dy'=b\cdot\frac{y'^3}{3}\Big|_0^h=\frac{b\cdot h^3}{3}$$

slično

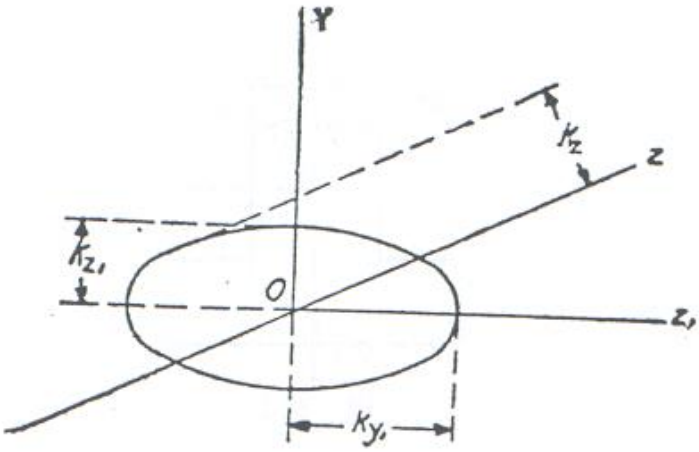
$$I_{y'}=\frac{h\cdot b^3}{3}$$

$$I_{y'z'}=\int_A y'z'\cdot dA=\int_0^h y'\cdot d\cdot y'\cdot\int_0^b z'\cdot d\cdot z'=\frac{y'^2}{2}\Big|_0^h\cdot\frac{z'^2}{2}\Big|_0^b=h^2\cdot b^2\Big|_4$$

odakle je:

$$tg\,2\varphi=\frac{h^2\cdot b^2}{2\cdot\left(\frac{h\cdot b^3}{3}-\frac{b\cdot h^3}{3}\right)}=\frac{3\cdot b\cdot h}{2\cdot(b^2-h^2)} \qquad (76)'$$

Prilikom izvođenja jed.(76) smatrali smo ugao φ za pozitivan u smislu kazaljke na satu (sl.34). On se mora, dakle, uzrti u tom smislu, ako ispadne pozitivan. Jed.(76)' daje dve različite vrednosti za φ koje se razlikuju za 90°. To su dva ortogonalna pravca glavnih osa. Kada su poznati pravci glavnih osa, odgovarajući momenti inercije mogu se naći iz jed.(73) i (74).
Poluprečnici inercije koji odgovaraju glavnim osama zovu se GLAVNI POLUPREČNICI INERCIJE.

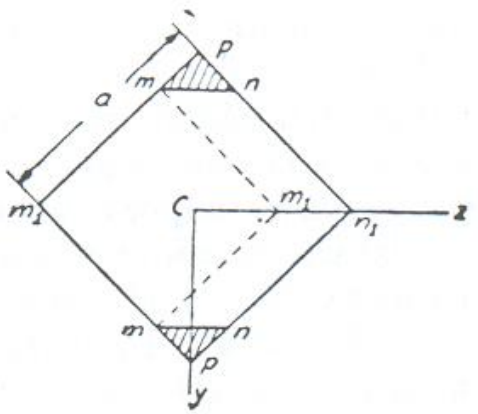


(sl.36)

Ako su y_1 i z_1 glavne ose inercije (sl.36), a ky_1 i kz_1 glavni poluprečnici inercije, elipsa sa poluosama ky_1 i kz_1 prikazana na slici zove se ELIPSA INERCIJE. Pomoću te elipse može se odrediti grafički poluprečnik inercije k_z za neku osu z na taj način što se povuče tangenta na elipsu paralelnu sa z. Odstojanje te tangente od koordinatnog početka O, je dužina k_z. Elipsa inercije daje sliku o promeni momenta inercije pri okretanju z ose u ravni figure oko tačke O, iz nje se vidi da glavni momenti inercije daju najveću i najmanju vrednost momenta inercije.

21. RAZLIČITI OBLICI POPREČNIH PRESEKA GREDA

Iz izlaganja u poglavlju 20 sledi da su najveći naponi zatezanja i pritiska kod čistog savijanja proporcionalni odstojanjima krajnjih vlakana grede od neutralne ose preseka. Prema tome, kada materijal ima istu otpornost prema zatezanju i pritisku, logično je birati oblik preseka tako da težište njegove površine bude na sredini visine grede. Tada će koeficijent sigurnosti za zategnuta i prisnuta vlakna biti isti. Ako presek nije simetričan u pogledu te ose, npr. željeznička šina, materijal se opet raspoređuje između gornjeg i donjeg dela na takav način da središte površine bude u sredini visine.
Za materijale koji imaju malu otpornost prema zatezanju, a visoku otpornost prema pritisku, na primer beton, bira se se oblik preseka koji nije simetričan u pogledu neutralne ose, već su odstojanja h_1 i h_2 (krajnjeg vlakna koji je zategnut i krajnjeg vlakna koji je pritisnut), od neutralne ose u istom odnosu u kojem su otpornost materijala prema zatezanju i njegova otpornost prema zatezanju i pritisku. Na taj način se postiže podjednaka sigurnost prema zatezanju i pritisku. Na primer, kod T preseka se može postići potreban položaj težišta površine zgodnim izborom odnosa dimenzije i rebra.
Ako je zadat napadni moment, najveći napon zavisi samo od otpornog momenta preseka grede. Treba primetiti da ima slučajeva kada povećanje površine preseka ne smanjuje napon. Na primer, kad grede kvadratnog preseka savijene spregovima u vertikalnoj ravni povučenoj kroz dijagonalu tog preseka smanjiće se najveći napon, kad odsečemo uglove šrafirane na slici.



(sl.37)

Neka je a dužina strane preseka. Moment inercije u pogledu z ose je:

$$I_z = \frac{a^4}{12} \qquad \text{(vidi sl.25)}$$

Otporni moment je:

$$W = \frac{I_z}{y} = \frac{I_z}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

Ako odsečemo uglove m n p tako da je $\overline{mp} = \alpha \cdot a$, gde je α parametar koji će se odrediti kasnije. Na taj način dobijeni presek sačinjavaju:

kvadrat mm_1mm_1 sa stranama $a \cdot (1-\alpha)$ i dva paralelograma mnn_1m_1. Moment inercije tog preseka u pogledu z ose je:

$$I_z' = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} + 2 \cdot \int_0^{(1-\alpha)\cdot a\frac{1}{\sqrt{2}}} \alpha \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} + 2 \cdot \alpha \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{(1-\alpha)\cdot a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{a^4 \cdot (1-\alpha)^4}{12} + 2 \cdot \frac{\alpha \cdot a \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \left[\frac{a \cdot (1-\alpha)}{\sqrt{2}}\right]^3 = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} + \frac{\alpha \cdot a}{3} \cdot a^3 \cdot (1-\alpha)^3$$

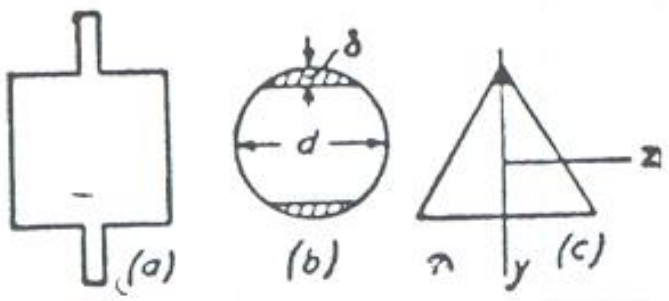
$$= \frac{a^4 \cdot (1-\alpha)^3}{12} \cdot (1-\alpha+4\cdot\alpha) = \frac{a^4(1-\alpha)^3}{12} \cdot (1+3\cdot\alpha)$$

a otporni moment je:

$$W' = \frac{I_z'}{y'} = \frac{a^4(1-\alpha)^3}{12} \cdot (1+3\cdot\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1-\alpha)\cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3 * (1-\alpha)^2 \cdot (1+3\cdot\alpha)$$

Ako potražimo sad vrednost α kojoj odgovara maksimum otpornosti moment, dobićemo $\alpha = \frac{1}{9}$.

Kad uvrstimo ovu vrednost α u W' vidimo da uklanjanje uglova smanjuje najveći napon za oko 5%. Ovaj rezultat se objašnjava time što je otporni moment jednak momentu inercije podeljenom polovinom visine preseka, ali u manjem odnosu nego njegovu visinu; zbog toga se otporni moment povećava, a $(\sigma_x)_{max}$ smanjuje. Sličan rezultat se dobija i u drugim slučajevima.



(sl.38)

Za pravougaonik se uzanim isturenim delovima (sl.38a) može se uz izvesne uslove otporni moment povećati, ako odsečemo te delove. Kod kružnog preseka (sl.38b) otporni moment se povećava za 0,7% ako otsečemo dva šrafirana segmenta visine $\delta = 0{,}011 \cdot d$. Kod trouglastog preseka (sl.38c) može se povećati otporni moment, ako otsečemo šrafirani ugao.

Pri dimenzionisanju grede izložene čistom savijanju mora se se zadovoljiti ne samo uslov dovoljne otpornosti, već i uslov njene najmanje težine. Od dve grede sa istim otpornim momentom, tj. sa

istim koeficijentom sigurnosti, ekonomičnija je ona sa manjom površinom preseka. Pri upoređenju različitih oblika preseka posmatrajmo prvo, pravougaonik visine h i širine b. Otporni moment je:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{1}{6} \cdot A \cdot h = 0.166 \cdot A \cdot h \qquad \text{(a)}$$

gde je A površina preseka. Vidi se da pravougaoni presek postaje tim ekonomičniji, što je veća visina h. Ali postoji izvesna granica tom povećanju:ako presek postane suviše uzan, postavlja se pitanje stabilnosti grede (bočno izvijanje).
Za kružni presek je (vidi sl.27)

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{1}{8} \cdot A \cdot d = 0.125 \cdot A \cdot d \qquad \text{(b)}$$

Kad uporedimo kružni i kvadratni presek iste površine, vidimo da je:

$$b^2 = \frac{d^2 \pi}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot d$$, za koju iz jed. (a) imamo:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot A \cdot d = 0.147 \cdot A \cdot d$$

Poredeći ovaj izraz sa (b) vidimo da je kvadratni presek ekonomičniji od kružnog.
Posmatranje rasporeda napona po visini preseka (sl.22.) dovodi do zaključka da radi ekonomičnosti treba, koliko je moguće više materijal grede rasporedi što dalje od neutralne ose. Raspored za datu površinu preseka A i visinu h bio bi najpovoljniji kada bi se svaka polovina površina nalazila u odstojanju $\frac{h}{2}$ od neutralne ose. Tada bi bilo:

$$I_z = 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{A \cdot h^2}{4} \quad ; \quad W = \frac{1}{2} \cdot A \cdot h \qquad \text{(c)}$$

Ovo je granica kojoj se približavamo u praksi primenom I preseka sa što većom površinom pojaseva. Kako se uvek jedan deo materijala mora smestiti u rebru grede, granična vrednost (c) se ne može nikad postići i za normalne I profile imamo otprilike:

$$W \approx 0.305 \cdot A \cdot h \qquad \text{(d)}$$

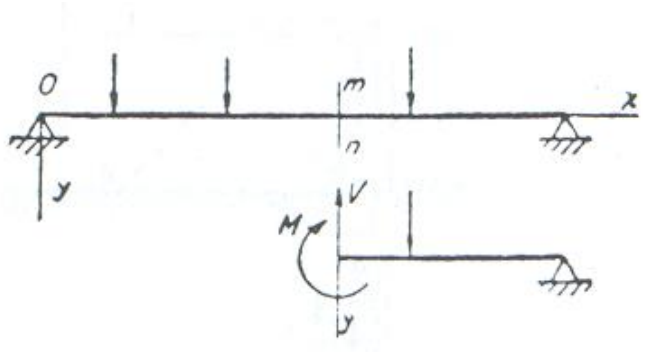
Upoređenje izraza (d) i (a) dovodi do zaključka da je I profil ekonomičniji od pravougaonog iste visine. U isto vreme je greda I profila, zahvaljujući širokim pojasevima, uvek stabilnija u pogledu bočnog izvijanja od grede pravougaonog preseka iste visine i istog otpornog momenta. Iz ove kratke diskusije vidimo razlog za široku upotrebu I profila u čeličnim konstrukcijama.

22. OPŠTI SLUČAJ SAVIJANJA SIMETRIČNIH GREDA POPREČNIM OPTEREĆENJEM

U opštem slučaju poprečno opterećenih greda u ravni simetrije naponi raspoređeni po poprečnom preseku moraju stajati u ravnoteži sa trensverzalnom silim i napadnim momentom u tom preseku. Proračun napona se obično vrši na taj način što se prvo određuju naponi izazvani napadnim momentom, tzv. naponi savijanja ili normalni napon, a zatim napon smicanja izazvani transvrzalnom silom. Ovde ćemo se ograničiti na izračunavanje napona savijanja, napone smicanja proučićemo u idućem članu. Pri izračunavanju napona savijanja pretpostavljamo da su oni raspoređeni po istom zakonu kao i kod čistog savijanja, pa koristimo već izvedene obrasce. Eksperimenti pokazuju da ova metoda daje zadovoljavajuću tačnost, ako posmatramo preseke koji nisu suviče bliski napadnim tačkama koncentrisanih sila raspored napona postaje složeniji. Obično se naponi savijanja izračunavaju za preseke u kojima napadni moment ima najveću pozitivnu ili negativnu vrednost. Kad imamo brojnu vrednost najvećeg napadnog momenta i veličinu dopuštenog napona savijanja σ_w potrebna dimenzije preseka greda određuje se iz jednačine:

$$\sigma_w = \frac{M_{\max}}{W} \qquad (77)$$

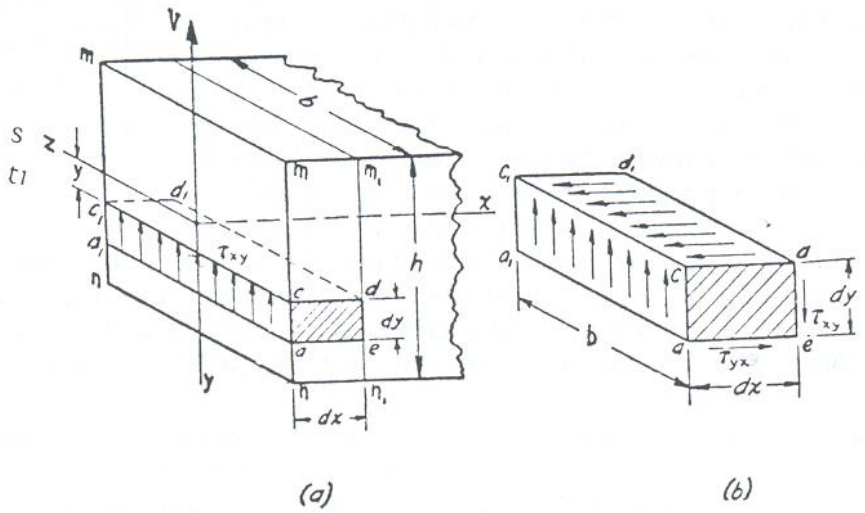
23. NAPONI SMICANJA PRI SAVIJANJU



(sl.39)

Već je napomenuto da se u preseku mn grede savijanje poprečnim teretima javljaju, sem σ_x, i naponi smicanja τ (sl.39). Posmatrajući desni deo grede (sl.39) možemo zaključiti iz uslova ravnoteže da veličina napona smicanja moraju biti tolike da njihova rezultanta bude jednaka transverzalnoj sili V. Proučavajući zakon po kojem su raspoređeni po preseku, počnimo sa jednostavnim slučajem pravougaonog preseka mmnn, (sl.40).

Prirodno je u tom slučaju pretpostaviti da su naponi smicanja u svakoj tački preseka paralelni transverzalnoj sili V, tj. paralelni stranama mn preseka. Takve napone obeležavamo sa τ_{xy}. Indeks y uz τ_{xy} označava da je napon smicanja paralelan y osi, a indeks x da je on u ravni upravnoj na x osu.



(sl.40)

Sem toga pretpostavljamo da su naponi smicanja raspoređeni jednoliko po širini CC_1 grede. Ove dve pretpostavke omogućavaju određivanje raspodele napona smicanja.

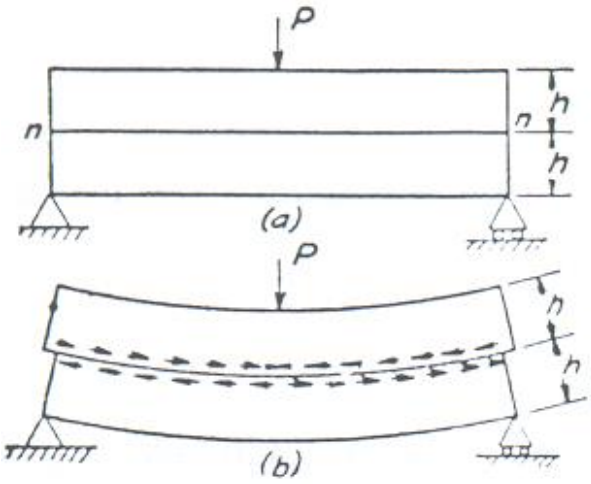
Ako je iz grede isečen elemnt sa dva bliska poprečna preseka i dve bliske ravni, paralne neutralnoj ravni, kao što je elemnt $acdea_1c_1d_1e_1$ na (sl.40b), onda su prema našoj pretpostavci naponi smicanja τ_{xy} na vertikalnoj strani acc_1a_1 raspoređeni jednoliko. Ovi naponi daju moment $(\tau_{xy} \cdot b \cdot d_y) \cdot d_x$ u pogledu donje zadnje ivice ee_1 elemnta koji mora stajati u ravnoteži sa momentom $(\tau_{yx} \cdot b \cdot d_x) \cdot d_y$ od napona smicanja raspoređenih po horizontalnoj strani elemnta cdd_1c_1. Tada je:

$$\tau_{yx} \cdot b \cdot d_x \cdot d_y = \tau_{xy} \cdot b \cdot d_y \cdot d_x \quad \text{i} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} \ ,$$

tj. naponi smicanja na dvema uzajamno upravnim stranama elementa moraju biti jednaki*.

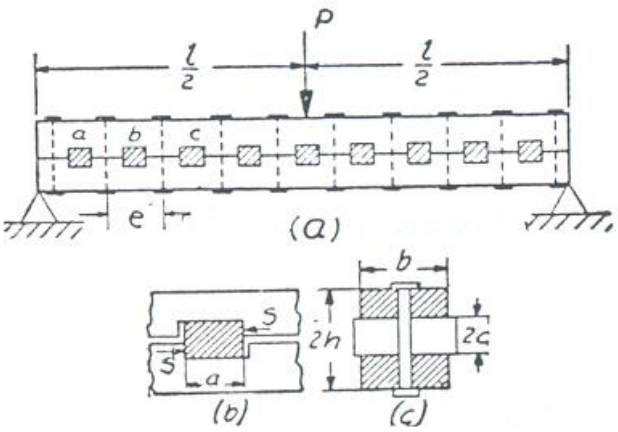
* Ovde se posmatra samo apsolutna vrednost ovih napona

Do istog zaključka dolazili smo i ranije, u slučaju aksijalnog naprezanja (jed.23) i u slučaju naprezanja u dva pravca (jed.30). Postojanje ovih napona smicanja u ravnima paralelnim neutralnoj može se potvrditi jednostavnim eksperimentom. Uzmimo dva jednaka pravougaona štapa oslonjena, kao što je prikazano na sl.41, i savijena koncentrisanim teretom P. Ako nema trenja između čvorova, svaki od njih se savija nezavisno od drugog; kod svakog od njih nastupiće skraćenje gornjih i istezanje donjih uzdužnih vlakana i oni će biti u uslovima prikazanim na sl.41b. Donja vlakna gornjeg štapa se onda pomeraju u odnosu na gornja vlakna donjeg štapa. Kod monolitnog štapa visine 2h u neutralnoj ravni nn javiće se naponi smicanja koji sprečavaju ovako pomeranje gornjeg dela štapa u odnosu na donji.

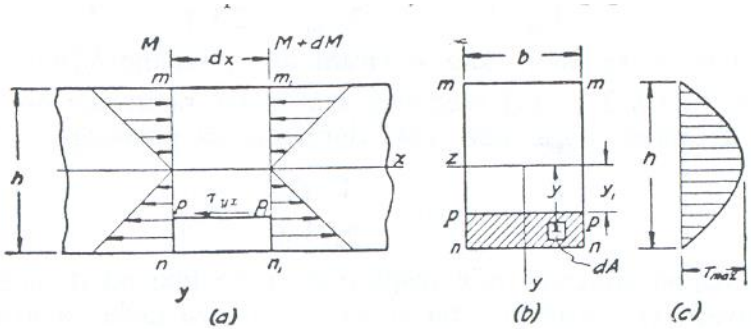


(sl.41)

Ovo sprečavanje pomeranja znatno povećava krutost i otpornost monolitnog štapa visine 2h u poređenju sa dva štapa visine h svaki. U praksi, da bi se sprečilo to pomeranje kod složenih drvenih greda često se primenjuju moždanici, a, b, c, ... sl.42a. Posmatrajući zazor oko moždanika (sl.42b) možemo odrediti pravac pomeranja kod složene grede, a prema tome i pravac napona smicanja u neutralnoj ravni monolitne grede. Iz gornjeg razlaganja vidimo da je napon smicanja u nekoj u nekoj tački vertikalnog preseka upravljen vertikalno, a brojno jednak horizontalnom naponu smicanja τ_{xy} u horizantalnoj ravni povučenoj kroz istu tačku. Ovaj poslednji napon možemo lako naći iz uslova ravnoteže elemnta pp_1nn_1 isečenog iz grede s dva bliska poprečna preseka mn i m_1n_1 i horizontalnoj ravni pp_1 sl.43a) i b).



(sl.42)



(sl.43)

U pravcu x ose taj element napadaju samo naponi smicanja τ_{xy} na strani pp_1 i normalni naponi σ_x na stranama pn i p_1n_1. Ako su napadni momenti u presecima mn i m_1n_1 jednaki, tj. u slučaju čistog savijanja, normalni napon σ_x na stranama np i n_1p_1 su takođe jednaki i stoje u ravnoteži. Tada je napon smicanja τ_{xy} jednak nuli. Posmatrajmo sad opštiji slučaj promenjivog napadnog momenta

beležeći sa M i M+dM momente u presecima mn, odnosno m_1n_1. Tada će elementarnu površinu dA strane nppn napadati normalna sila (jed.55)

$$\sigma_x \cdot dA = \frac{M \cdot y}{I_z} \cdot dA$$

Zbir takvih sila raspoređenih po strani nppn elementa biće:

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{M \cdot y}{I_z} \cdot dA \qquad \text{(a)}$$

Na isti način zbir normalnih sila koje napadaju stranu $n_1p_1p_1n_1$ je:

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M + dM) \cdot y}{I_z} \cdot dA \qquad \text{(b)}$$

Sila koja odgovara naponima smicanja na gornjoj strani pp_1 elementa je:

$$\tau_{yx} \cdot b \cdot dx \qquad \text{(c)}$$

Sile date izrazima (a), (b), (c) moraju zadovoljiti jednačinu $\sum x = 0$, odakle je:

$$\tau_{yx} \cdot b \cdot dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M + dM) \cdot y}{I_z} \cdot dA - \int_{y_1}^{h/2} \frac{M \cdot y}{I_z} \cdot dA \ ,$$

ili

$$\tau_{yx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{b \cdot I_z} \int_{y_1}^{h/2} y \cdot dA$$

ili koristeći vezu između poprečne sile V i momenta M (statika konstrukcija i statika) $\frac{dM}{dx} = V$ imamo:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{b \cdot I_z} \cdot \int_{y_1}^{h/2} \cdot y \cdot dA \qquad (78)$$

Integral u gornjoj jednačini ima vrlo jednostavno tumačenje. To je moment šrafiranog preseka (sl.43.b) u pogledu neutralne z ose. Za pravougaoni presek je:

$$dA = b \cdot dy \ ,$$

te je integral jednak:

$$S = \int_{y_1}^{h/2} b \cdot y \cdot dy = b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \qquad \text{(d)}$$

Isti rezultat može se dobiti kad šrafirani deo površine $b\left[\frac{h}{2} - y_1\right]$ pomnožimo odstojanjem $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{h}{2} + y_1\right]$ njegovog težišta od neutralne ose. Kad uvrstimo (d) u jed.(78) dobijamo za pravougaoni presek:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V \cdot S}{b \cdot I_z} = \frac{V}{2 \cdot I_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \qquad (79)$$

Vidi se da napon smicanja nije raspoređen jednoliko od donjeg do gornjeg kraja grede. Najveću vrednost τ_{xy} ima za $y_1 = 0$, tj. za tačke neutralne ose. Onda je prema jed.(79):

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{V \cdot h^2}{8 \cdot I_z} \quad , \quad \text{a kako je} \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \ ,$$

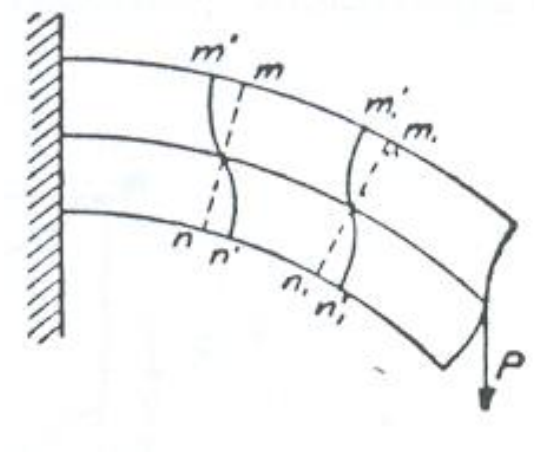
$$\left(\tau_{xy}\right)_{\max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{V}{b\cdot h} \qquad (80)$$

Dakle, najveći napon smicanja za pravougaoni presek je 50% veći od prosečnog napona smicanja koji se dobija kad podelimo transverzalnu silu površinom preseka $\left(\tau_{xy\ prosečno} = \frac{V}{b\cdot h}\right)$.

U prethodnom izvođenju uzeli smo element pnp_1n_1 iz donjeg dela grede. Isti bismo rezultat dobili ako bismo uzeli element iz gornjeg dela.

Na donjem i na gornjem kraju preseka $y_1 = \pm\frac{h}{2}$, iz jed.(79) sledi $\tau_{xy} = 0$. Dijagram jed.(79), (sl.43c) pokazuje da su naponi smicanja raspoređeni duž visine grede po paraboli. Šrafirana površina ograničena parabolom pomnožena sa širinom grede b daje $\frac{2}{3}\left(\tau_{xy}\right)_{\max}\cdot h\cdot b = V$, kao što i treba da bude.

Prirodna posledica napona smicanja su klizanje zbog kojih se poprečni preseci, koji su bili ravni, pretvaraju u krive površine. Ova deformacija se lako može demonstrirati savijanjem pravougaonog gumenog štapa silom na kraju, ako na njegovim bočnim stranama prethodno nacrtamo vertikalne prave (sl.44). Ove prave, prikazane isprekidanim linijama, pretvaraju se u krive linije tako da se najveće klizanje javlja na neutralnoj površini. U tačkama m', m_1', n', n_1' klizanja postaju jednaka nuli, tako da su krajevi krivih m', n', m_1', n_1' normalni na gornju i donju stranu štapa posle savijanja. Kod neutralne površine uglovi između tangenti na krive linije m'n' i m_1'n_1' i upravnih preseka mn i m_1n_1 jednaki su $\gamma = \frac{1}{6}\cdot\left(\tau_{xy}\right)_{\max}$.



(sl.44)

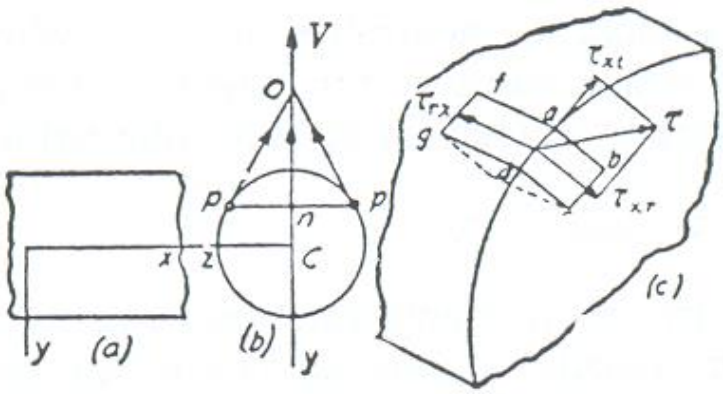
Ako transverzalna sila ostaje konstanta duž grede, deformacija je ista u svim presecima, tako da je:

mm'=m_1m_1' , nn'=n_1n_1' i ne utiče na istezanje ili skraćenje uzdužnih vlakana od napadnih momenata. Ova činjenica objašnjava zašto i ovde važi jed.(55) izvedena za čisto savijanje a osnovana je na pretpostavci da preseci štapa ostaju pri savijanju ravni.

Detaljnije proučavanje ovog problema pokazuje da deformacija preseka bitno utiče na dilataciju uzdužnih vlakana i u tom slučaju kada gredu savija podeljeni teret, a transverzalna sila se neprekidno menja duž grede. U slučaju koncetrisanih tereta raspodela napona u blizini tereta je složenija, ali odstupanja od pravolinijskog zakona su čisto lokalne prirode.

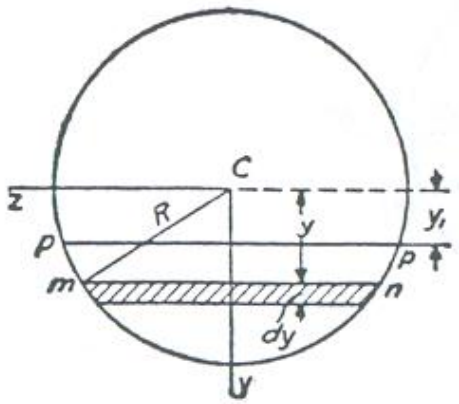
24. RASPORED NAPONA SMICANJA ZA SLUČAJ GREDE KRUŽNOG PRESEKA

Pri posmatranju raspodele napona smicanja po površini kružnog preseka (sl.45) nemamo osnovu da činimo pretpostavku da su svi naponi smicanja paralelni transverzalnoj sili V.



(sl.45)

Ustvari može se neposredno pokazati da su naponi smicanja u tačkama p (sl.45b) konturne linije preseka upravljeni po tangenti te linije. Posmatrajmo beskonačno mali elementabcd (sl.45c) u obliku pravougaonog paralelopipeda sa stranom adfg na bočnoj površini grede i stranom abcd u ravni yz poprečnog preseka. Ako napon smicanja na strani abcd elementa ima pravac τ (kao na slici), on se može uvek razložiti u dve komponente: τ_{xr} u radijalnom pravcu i τ_{xt} u pravcu tangente na konturi. Ranije je bilo pokazano, da ako na elementarnu površinu deluje napon smicanja τ, isti toliki napon deluje i na elementarnu površinu upravnu na τ. Kad primenimo to na naš slučaj, moramo zaključiti da ako napon smicanja τ_{rx} deluje na element abcd u radijalnom pravcu , mora postojati isto toliki napon smicanja τ_{xr} koji deluje na stranu adfg na bočnoj površini grede. Ako na bočnoj strani nema napona smicanja, mora radijalna komponenta τ_{xr} napona smicanja τ biti jednaka nuli, tj. τ mora imati pravac tangente na konturnuliniju preseka grede. Iz uslova simetrije sledi da napon smicanja na sredini u tetivi pp ima pravac transverzalne sile. Tada će pravci napona smicanja u tačkama p i n seći osu u istoj tački O, (sl.45b). Ako pretpostavimo da su naponi smicanja i u svim ostalim tačkama prave pp upravljeni prema tački O, pravci napona smicanja biće potpuno određeni. Kako se ova pretpostavka potpuno poklapa sa onom učinjenom u slučaju pravougaonog preseka, možemo za izračunavanje te komponente koristiti jed. (78). Kako nam je sada poznat pravac napona smicanja i njegova veretikalna komponenta, može se lako izračunati veličina tog napona za ma koju tačku preseka.



(sl.46)

Sračunajmo veličine napona smicanja u tačkama prave pp preseka, (sl.46). Da bismo za izračunavanje vertikalne komponente τ_{yx} tih napona koristiti jed.(78), moramo naći moment segmenta kruga ispod linije pp u pogledu z ose. Elementarna površina mn ima dužinu $2\cdot\sqrt{R^2-y^2}$ i širinu dy, prema tome ona je $dA = 2\cdot\sqrt{R^2-y^2\cdot dy}$. Njen moment u pogledu Cz je $y\cdot dA$, a celokupan moment površine segmenta je:

$$S = \int_{y_1}^{R} 2\cdot\sqrt{R^2-y^2}\cdot y\cdot dy = \frac{2}{3}\cdot\left(R^2-y_1^2\right)^{3/2}$$

Kad uvrstimo taj izraz taj izraz u jed.(78) i zamenimo b sa $2\cdot\sqrt{R^2-y_1^2}$ dobićemo:

$$\tau_{xy} = \frac{V\cdot\left(R^2-y_1^2\right)}{3\cdot I_z} \qquad (81)$$

Ukupan napon smicanja u tački p(sl.46) je $\tau = \dfrac{\tau_{xy}}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{R^2 - y_1^2}}{R}$

$$\tau = \frac{\tau_{xy} \cdot R}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} = \frac{V \cdot R \cdot \sqrt{R^2 - y_1^2}}{3 \cdot I_z}$$

Kao što se vidi najveći τ odgovara pri $y_1 = 0$, tj. neutralnoj osi preseka. Kad uvrstimo

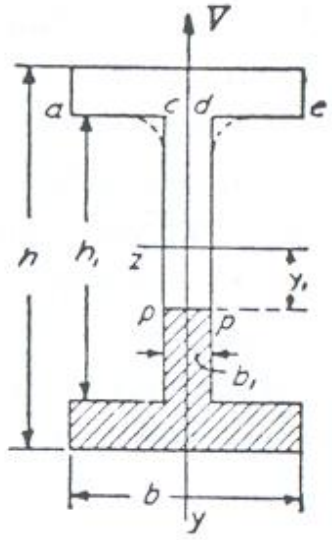
$I_z = \dfrac{\pi \cdot d^4}{64} = \dfrac{\pi \cdot R^4 \cdot 2^4}{64} = \dfrac{\pi \cdot R^4}{4}$ dobija se:

$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot V}{3 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{A} \tag{82}$$

Dakle, kod kružnog preseka je najveći napon smicanja za 33% veći od prosečne vrednosti koju dobijamo delenjem transverzalne sile površinom poprečnog preseka.

25. RASPORED NAPONA SMICANJA U GREDAMA I PROFILA

Pri posmatranju rasporeda napona smicanja u I gredi na (sl.47) čini se ista pretpostavka za presek rebra kao i za pravougaoni presek, tj. da su naponi smicanja paralelni transverzalnoj sili V i raspoređeni jednoliko po debljini b_1 rebra. Tada se može koristiti jed.(78) za izračunavanje napona τ_{xy}.



(sl.47)

Za tačke linije pp u odstojanju y_1 od neutralne ose, moment šrafiranog dela površine u pogledu neutralne z ose je:

$$S = \int_{y_1 2}^{h/2} y \cdot dA = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right)$$

Kad uvrstimo taj izraz u jed(78) dobija se:

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b_1 \cdot I_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right] \tag{83}$$

Napon se menja, dakle, po visini grede po paraboli. Najveću i najmanju vrednost τ_{xy} u rebru grede dobijamo zamenom

$y_1 = 0$ i $y_1 = h_1/2$

$$\left(\tau_{xy}\right)_{\max} = \frac{V}{b_1 \cdot I_z} \cdot \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8}(b - b_1) \right] \tag{84}$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_{\min} = \frac{V}{b_1 \cdot I_z} \cdot \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right) \tag{85}$$

Ako je b_1 vrlo malo u poređenju sa b, nema velike razlike između $\left(\tau_{xy}\right)_{\max}$ i $\left(\tau_{xy}\right)_{\min}$, te se raspodela napona smicanja po preseku rebra može praktički smatrati jednolikim.

Dobru aproksimaciju za $\left(\tau_{xy}\right)_{\max}$ dobijamo delenjem celokupne transverzalne sile V površinom preseka samog rebra. To se vidi iz činjenice da naponi smicanja u tačkama preseka rebra rezultiraju u sili koja je otprilike jednaka V, tj. rebro prima skoro ukupnu transverzalnu silu, a flanše igraju u tome drugorazrednu ulogu. Da bismo to pokazali sabiramo napone τ_{xy} po površini rebra u rezultantu koju ćemo beležiti sa V_1. Prema jed.(83) ona je:

$$V_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_{xy} \cdot b_1 \cdot dy = \frac{V}{b_1 \cdot I_z} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right] \cdot b_1 \cdot dy$$

ili, kad izvršimo integralisanje:

$$V_1 = \frac{V}{I_z}\left[\frac{b(h-h_1)}{2} \cdot \frac{h+h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{2} + \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} \right] \qquad \text{(a)}$$

Kod male debljine pojaseva, tj. kada je h_1 blisko h moment inercije može sa dovoljnom tačnošću izraziti jednačinom:

$$I_z = \frac{b(h-h_1)}{2} \cdot \frac{(h+h_1)^2}{8} + \frac{b_1 h_1^3}{12} \qquad \text{(b)}$$

u kojoj prvi član predstavlja površinu preseka pojaseva pomnoženu kvadratom ostojanja $\frac{h+h_1}{4}$ njihovih težišta od z ose, što je otprilike jednako ukupnom momentu inercije preseka pojaseva. Drugi član je moment inercije preseka rebra. Kad uporedimo (a) i (b), vidimo da kad h_1 teži h, sila V_1 teži V, te će ukupna transverzalna sila biti primljena od samog rebra.

Pri posmatranju rasporeda napona smicanja po poprečnom preseku pojaseva ne sme se pretpostaviti da se oni ne menjeju duž širine preseka. Na primer, na delovima ac i de prave ae, (sl.47) duž donje ivice pojaseva, naponi smicanja moraju biti nula, jer su jednoliki naponima smicanja na slobodnoj donjoj površini pojaseva, koji su jednaki nuli (vidi sl.45.c). Međutim, na delu cd napon smicanja nisu nule, već imaju gore sračunatu vrednost za (τ_{xy}) nisu urebru. Odavde se vidi da je u spoju cd rebra i pojasa zakon rasporeda napona smicanja složeniji nego što možemo pronaći ovim elemntarnim posmatranjem. Da bi se ublažila koncentracija napona u tačkama c i d, oštri uglovi se obično zaobljavaju.

26. GLAVNI NAPONI PRI SAVIJANJU

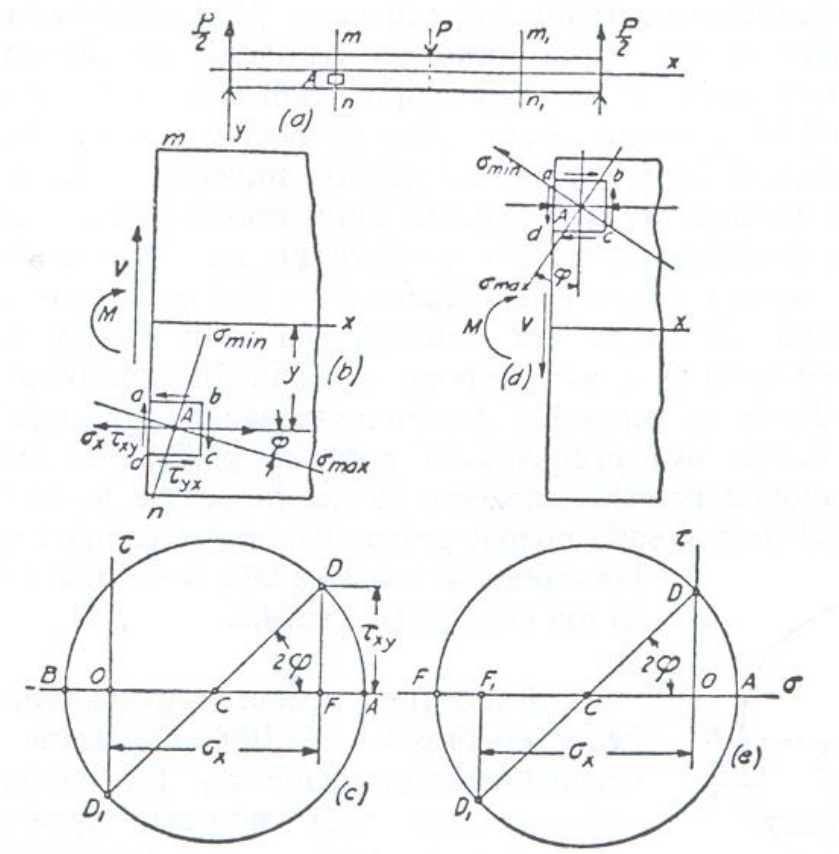
Pomoću jednačina:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z} \quad \text{i} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{b \cdot I_z} \cdot \int_{y_1}^{h/2} \cdot y \cdot dA = \frac{V \cdot S}{b \cdot I_z}$$

mogu se naći normalni napon σ_x i napon smicanja τ_{xy} u ma kojoj tački preseka, ako su za taj presek poznati napadni moment M i transverzalna sila V. Najveću brojnu vrednost σ_x ima u vlaknu koje ima najveće odstojanje od neutralne ose. U većini slučajeva pri dimenzionisanju greda vodi se računa samo o tim najvećim vrednostim σ_x i τ_{xy} i poprečne dimenzije greda biraju se tako da se zadovolje uslovi:

$$(\sigma_x)_{\max} \le \sigma_w \quad \text{i} \quad (\tau_{xy})_{\max} \le \tau_w$$

Ovde je pretpostavljeno da materijal ima istu otornost prema zatezanju i pritisku i da je σ_w isto za oba slučaja. U protivnom slučaju moraju se zadovoljiti posebni uslovi otpornosti prema zatezanju i pritisku , tako da se dobija $(\sigma_x)_{\max} \le \sigma_w$ za zatezanje i $(\sigma_x)_{\min} \le \sigma_w$ za pritisak. Ali ima slučajeva kada je potrebno detaljnije proučavanje napregnutog stanja. Način takvog proučavanja prikazaćemo sada na primeru proste grede opterećene na sredini (sl.48). Za tačku A ispod neutralne ose, a poprečnom preseku mn veličine napona σ_x i $\tau_{xy} = \tau_{xy}$ date su gornjim jednačinama. Na (sl.48b) prikazano je kako ti naponi deluju na beskonačno mali element isečen iz grede u tački A;smerovi napona lako se određuju na osnovu smerova



(sl.48)

M i V. Kod takvog beskonačno malog elementa mogu se zanemariti razlike u veličini napona σ_x i τ_{xy} u različitim njegovim tačkama. Može se smatrati da je taj element u stanju homogenog naprezanja, tj. da su veličine σ_x i τ_{xy} u svim tačkama elementa iste.

Iz predhodnih posmatranja znamo da se naponi na stranama elementa isečenog iz napregnutog tela menjaju sa promenom pravca strana i da se element može tako okrenuti da njegove strane napadaju samo normalni naponi. Takvi pravci strana zovu se glavnim pravcima, a naponi na njima glavnim naponima. Veličine tih napona možemo naći iz jed.(31) i (32) zamenom u njima $\sigma_y = 0$. Tada dobijamo:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} \ , \tag{86}$$

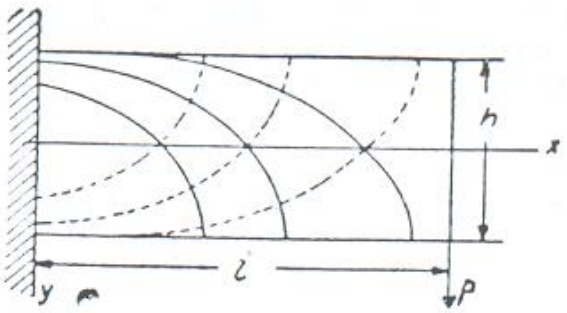
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} \ , \tag{87}$$

Treba primeniti da je $\sigma_{\max}$ uvek zatezanje, a $\sigma_{\min}$ uvek pritisak. Kad znamo glavne napone, najveći napon smicanja u nekoj tački može se naći iz jed.(34)

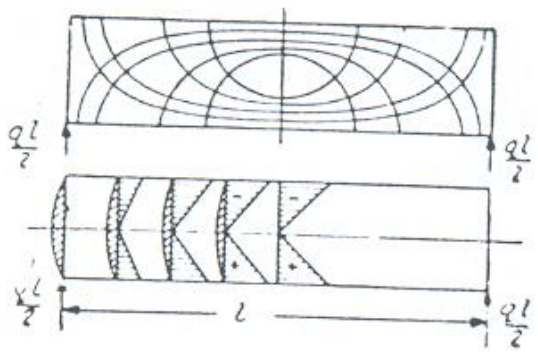
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} \tag{88}$$

Ako izaberemo tačku na neutralnoj površini, σ_x za nju postaje nula. Element u toj tački biće u stanju čistog smicanja. Pravci glavnih napona zaklapaće uglove od 45° sa x i y osom.

Mogu se konstruisati dva sistema ortogonalnih krivih čije tangente u svakoj tački imaju pravce glavnih napona u toj tački. Takve krive zovu se TRAJEKTORIJAMA NAPONA, sl.49. prikazuje trajektorije napona za pravougaonu konzolu opterećenu na kraju.



(sl.49)



(sl.50)

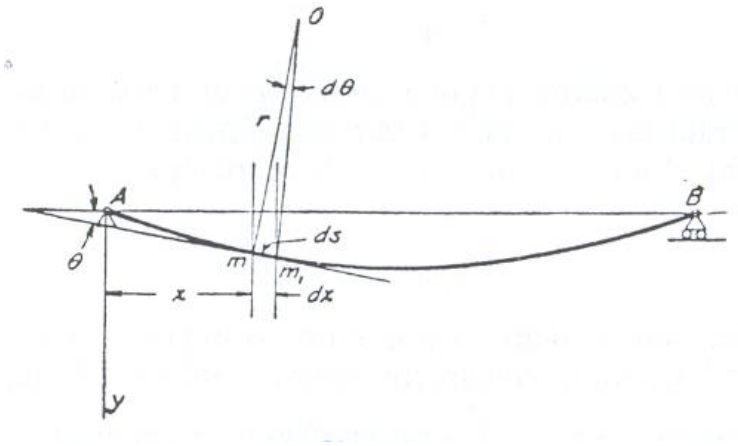
Sve te krive seku neutralnu površinu pod uglom 45° i imaju horizontalne i vertikalne tangente u tačkama gde je napon smicanja nula, tj. u tačkama gornje i donje površine grede. Trajektorije koje daju pravce $\sigma_{\max}$ (zatezanje) nacrtane su izvučenim linijama, a trajektorije drugog sistema isprekidanom i (sl.50) prikazuje trajektorije i raspored napona σ_x i τ_{xy} u poprečninim presecima proste grede opterećene jednoliko podeljenim teretom. Vidi se odmah da σ_x ima najveću vrdnost na sredini grede, gde je napadni moment M najveći, a da je τ_{xy} najveći iznad oslonca, gde deluje najveća transverzalna sila.

Iz jed.(86) vidi se da za krajnja zategnuta vlakna, gde je napon smicanja nula, uzdužni normalni napon σ_x postaje glavni napon, tj. da je $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_{\max}$. Za vlakna koja su bliža neutralnoj osi uzdužni napon u vlaknima σ_x je manji od onog u krajnjem vlaknu, ali ovde imamo i napon smicanja τ_{yx}, tako da kad naponi σ_x i τ_{xy} deluju zajedno u tački, oni mogu dati glavni napon, određen jed.(86), brojno veći čak i od onog u krajnjem vlaknu. Kod greda pravougaonog ili kružnog preseka kod kojih se napon smicanja τ_{xy} menja neprekidno po visini grede, ovo se obično ne dešava, to znači da je $(\sigma_x)_{\max}$, određen za krajnje vlakno u preseku sa najvećim napadnim momentom, najveći napon u gredi. Međutim, kod greda profila kao što je I, gde se javlja nagla promena napona smicanja u spoju flanše i rebra, najveći napon u tom spoju, određen jed(86), može ispasti većim od napona zatezanja $(\sigma_x)_{\max}$ u krajnjem vlaknu. On se, dakle, mora uzeti u obzir pri dimenzionisanju.

IV. UGIB SAVIJENE GREDE

27. DIFERENCIJALNA JEDNAČINA ELASTIČNE LINIJE

Pri dimenzionisanju nosača, osim o naponima izazvanim opterećenjem, mora se voditi računa i o ugibima usled zadanih tereta. U mnogim slučajevima je čak propisano da najveći ugib ne sme da prekorači izvestan mali deo raspona.



Neka kriva AmB na slici prikazuje oblik ose grede posle savijanja. Ta kriva zove se elastična linija. Za izvođenje njene diferencijalne jednačine upravimo koordinatne ose , kao što je pokazano na slici, i pretpostavimo da krivina u nekoj tački zavisi samo od veličine napadnog momenta M u toj tački, (uticaj transverzalne sile na krivinu biće proučen kasnije, gde će se videti da je on neznatan i da se može zanemariti). U tom slučaju zavisnost između krivine i momenta biće ista kao i kod čistog savijanja (jed.54).

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I_z} \qquad \text{(a)}$$

Da bismo izveli zavisnost između krivine i oblika te krive posmatrajmo dve susedne tačke m i m_1, na malom rastojanju ds izmerenom po krivoj. Ako je θ ugao koji tangenta u tački m zaklapa sa x osom, ugao između normala u tačkama m i m_1 biće $d\theta$. Tačka O, gde se te normale seku, je središte krivine i određuje veličinu r poluprečnika krivine. Tada je:

$$ds = r \cdot d \cdot \theta \quad \text{i} \quad \frac{1}{r} = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| , \qquad \text{(b)}$$

U pogledu znaka na desnoj strani koji je označen sa apsolutnom vrednošću imamo sledeće. Napadni moment u jed.(a) je pozitivan, ako je konkavna strana elastične linije upravljena na gore (vidi jed.55). Prema tome krivina je pozitivna, ako je njeno središte iznad krive, kao na gornjoj slici. Vidi se da se za takvu krivinu ugao θ smanjuje pri pomeranju tačke m duž krive od A prema B. To znači da pozitivan priraštaju ds odgovara negativni $d\theta$. Zato se jed.(b) mora napisati u obliku

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{ds} \qquad \text{(c)}$$

U praktičnim primenama dopuštaju se vrlo mali ugibi greda, pa se može sa dovoljnom tačnošću smatrati da je

$$ds \approx dx \quad \text{i} \quad \theta \approx tg\theta = \frac{dy}{dx} \qquad \text{(d)}$$

Kad uvrstimo ove približne vrednosti za ds i θ u jed.(c), biće

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2 y}{dx^2} , \qquad \text{(e)}$$

i jed.(a) dobija oblik

$$EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \qquad (89)$$

Ovo je diferencijalna jednačina elastične linije koju treba u svakom posebnom slučaju integraliti da bi se našli ugibi greda.

Treba primetiti da znak u jed.(89) zavisi od izabranog smera koordinatnih osa. Na primer, ako upravimo pozitivnu y osu na gore, mora se umesto jed.(d) staviti $\theta \approx -\frac{dy}{dx}$, tako da na desnoj strani jed.(89) dobijamo pozitivan znak mesto negativan.
Kod vrlo gipkih štapova kod kojih ugib može biti znatan, nije dopuštena primana uproštenog izraza (d), već se mora uvesti tačan izraz

$$\theta = arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Tada je :

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d \cdot arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{\frac{d\ y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \text{(f)}$$

Kad uporedimo ovaj rezultat sa jed.(e), vidi se da su za uprošćavanja usvojena u jed.(d) ekvivalentna pretpostavci da je $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ u imenitelju tačnog obrasca (f) mala veličina u poređenju sa jedinicom i da se može zanemariti.
Kad diferencijalnimo jrd.(89) po x i uzmemo u obzir jed:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{i} \quad \frac{dv}{dx} = -q$$

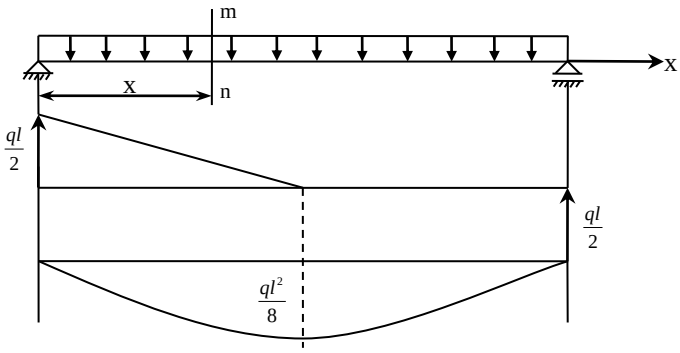
$$EI_z \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = -V$$

$$EI_z \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = q \qquad (90)$$

Poslednja jednačina se ponekad koristi pri proučavanju ugiba greda savijenih podeljenim opterećenjem.

28. SAVIJANJE GREDE JEDNOLIKO PODELJENIM TERETOM

Kod proste grede opterećene jednoliko podeljenim teretom napadni moment u preseku mn na odstojanju x od levog ležišta je:



$$V = q \cdot \left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

$$M = \frac{qx}{2} \cdot (\ell - x)$$

$$M = \frac{q\ell x}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

pa dif. jed.(89) postaje:

$$EI_z \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q\ell x}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

Kad pomnožimo obe strane sa dx i integralimo, dobijemo:

$$EI_z \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{q\ell x^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C \qquad \text{(a)}$$

gde je C integraciona konstanta, koju treba tako izabrati da se zadovolje specifični uslovi problema. U datom slučaju sledi iz simetrije da je nagib na sredini raspona jednak nuli. Kad uvrstimo $\frac{dy}{dx}=0$ za $x=\ell/2$, dobijamo:

$$C=\frac{q\ell^3}{24} \ ,$$

te jed.(a) postaje:

$$EI_z\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{q\ell x^2}{4}+\frac{qx^3}{6}+\frac{q\ell^3}{24} \qquad \text{(b)}$$

Ponovnim integralenjem nalazimo:

$$EI_z\cdot y=-\frac{q\ell x^3}{12}+\frac{qx^4}{24}+\frac{q\ell^3 x}{24}+C_1 \qquad \text{(c)}$$

Nova intergaciona konstanta C_1 određuje se iz uslova da su ugibi iznad ležišta jednaki nuli. Kad uvrstimo y=0 i x=0 u jed.(c), nalazimo C_1=0 i jed.(c) dobija oblik:

$$y=\frac{q}{24EI_z}\cdot\left(\ell^3\cdot x-2\cdot\ell x^3+x^4\right) \qquad (91)$$

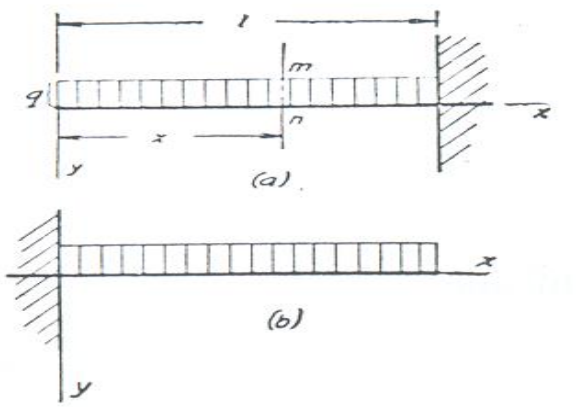
Ovo je jednačina elastične linije proste grede savijene jednoliko podeljenim opterećenjem. Najveći ugib je očigledno na sredini raspona grede. Kad uvrstimo $x=\ell/2$ u jed.(91), nalazimo:

$$y_{\max}=\frac{5}{384}\cdot\frac{q\ell^4}{E\cdot I_z} \qquad (92)$$

Najveći nagib elastične linije je na levom kraju grede za koji, kad uvrstimo x=0, nalazimo iz jed.(b):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max}=\frac{q\ell^3}{24\cdot EI_z} \qquad (93)$$

U slučaju konzole savijene jednoliko podeljenim opterećenjem, napadni moment u preseku mn na odstojanju x od levog kraja je:



$$M=-\frac{qx^2}{2} \ ,$$

i jed.(89) dobija oblik:

$$EI_z\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{qx^2}{2}$$

Posle prvog integralenja dobijamo:

$$EI_z\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{qx^3}{6}+C \qquad \text{(d)}$$

Integracionu konstantu nalazimo iz uslova da je nagib elastične linije na uklještenom kraju jednak nuli, tj. da je $dy/dx=0$ za $x=\ell$. Kad uvrstimo ove vrednosti u jed.(d) dobijamo:

$$C=-\frac{q\ell^3}{6}$$

Ponovnim integralenjem nalazimo:

$$EI_z\cdot y=\frac{qx^4}{24}-\frac{q\ell^3 x}{6}+C_1 \qquad \text{(e)}$$

Konstantu C_1 nalazimo iz uslova da je ugib jednak nuli na uklještenom kraju. Kad stavimo za $y=0$, $x=\ell$ iz jed.(e), dobijamo:

$$C_1 = \frac{q\ell^4}{8}$$

Kad uvrstimo ovu vrednost u jed.(c), biće:

$$y = \frac{q}{24 \cdot EI_z} \cdot \left(x^4 - 4 \cdot \ell^3 \cdot x + 3 \cdot \ell^4\right) \tag{94}$$

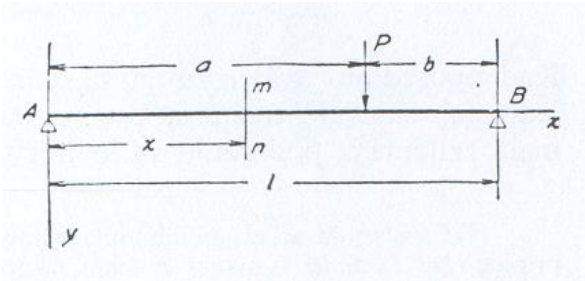
Ova jednačina određuje elastičnu liniju konzole savijene jednolko podeljenim oterećenjem. Ako je mesto desnog kraja uklješten levi, elastičnu liniju možemo , očikledno, naći zamenom x sa $\ell - x$ u jed.(94). Tako dobijamo:

$$y = \frac{q}{24 \cdot EI_z} \cdot \left((\ell - x)^4 - 4 \cdot \ell^3 \cdot (\ell - x) + 3 \cdot \ell^4\right)$$

$$= \frac{q}{24EI_z}\left(\left(\ell^2 - 2\ell x + x^2\right)^2 - 4\ell^4 + 4\ell^3 x + 3\ell^4\right)$$

$$y = \frac{q}{24 \cdot EI_z}\left(x^4 - 4 \cdot \ell \cdot x^3 + 6 \cdot \ell^2 \cdot x^2\right) \tag{95}$$

29. ELASTIČNA LINIJA PROSTE GREDE SAVIJENE KONCENTRISANIM TERETOM



U ovom slučaju imamo dva izaraza za napadni moment koji odgovaraju različitim delovima grede.

$$R_1 = \frac{P \cdot b}{\ell} \quad , \quad R_2 = \frac{P \cdot a}{\ell}$$

Za deo grede $x \le a$

$$V = \frac{P \cdot b}{\ell} \quad \text{i} \quad M = \frac{P \cdot b}{\ell} \cdot x$$

Za deo grede $x \ge a$ $\qquad V = \frac{P \cdot b}{\ell} - P = -\frac{P \cdot a}{\ell} \quad ; \quad M = \frac{P \cdot b}{\ell} \cdot x - P \cdot (x - a)$

Moramo, dakle, napisati odvojeno jed.(89) za svaki deo. Tada imamo:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P \cdot b}{\ell} \cdot x \quad , \qquad x \le a$$

$$EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P \cdot b}{\ell} \cdot x + P \cdot (x - a) \quad , \quad x \ge a$$

Integralenjem ovih jednačina nalazimo:

$$\left.\begin{aligned} EI_z \cdot \frac{dy}{dx} &= -\frac{P \cdot b \cdot x^2}{2 \cdot \ell} + C \quad , \qquad x \le a \\ EI_z \cdot \frac{dy}{dx} &= -\frac{P \cdot b \cdot x^2}{2 \cdot \ell} + \frac{P \cdot (x - a)^2}{2} + C_1 \quad , \quad x \ge a \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Kako oba dela elastične linije moraju imati zajedničku tangentu u napadnoj tački tereta P, gornji izrazi (a)za nagib moraju se poklapati sa $x = a$. Odavde se vidi da su integracione konstante jednake, tj. C=C$_1$. Kad integralimo ponovo i zamenimo C$_1$ sa C, dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} EI_z \cdot y &= -\frac{P \cdot b \cdot x^3}{6 \cdot \ell} + C \cdot x + C_2 \quad , \qquad x \le a \\ EI_z \cdot y &= -\frac{P \cdot b \cdot x^3}{6 \cdot \ell} + \frac{P \cdot (x - a)^3}{6} + C \cdot x + C_3 \quad , \quad x \ge a \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Kako oba dela elastične linije moraju imati istu ordinatu u napadnoj tački tereta, oba izraza (b) moraju se poklapati za $x = a$. Odavde sledi da je $C_2 = C_3$. Moramo, dakle, odrediti samo dve konstante C i C_2, a za to imamo dva uslova, naime, da je ugib na svakom kraju grede jednak nuli. Kad uvrstimo $x = 0$ i $y = 0$ u prvi izraz od izraza (b), nalazimo:

$$C_2 = 0 = C_3 \tag{c}$$

Kad uvrstimo $y = 0$ i $x = \ell$ u drugi od izraza (b), biće:

$$O = -\frac{P \cdot b \cdot \ell^3}{6 \cdot \ell} + \frac{P \cdot (\ell - a)^3}{6} + C \cdot \ell \;\; ; \;\; O = -\frac{P \cdot b \cdot \ell^2}{6} + \frac{P}{6} \cdot \left(b^3\right) + C \cdot \ell$$

$$C = \frac{P \cdot b \cdot \ell^2}{6 \cdot \ell} - \frac{P \cdot b^3}{6 \cdot \ell} = \frac{P \cdot b \cdot \left(\ell^2 - b^2\right)}{6 - \ell} \tag{d}$$

Uvrstimo li vrednosti (c) i (d) za integracione konstante u jed.(b), nalazimo elastičnu liniju:

$$EI_z \cdot y = \frac{P \cdot b \cdot x}{6 \cdot \ell}\left(\ell^2 - b^2 - x^2\right) \quad , \qquad x \le a \tag{96}$$

$$EI_z \cdot y = \frac{P \cdot b \cdot x}{6 \cdot \ell}\left(\ell^2 - b^2 - x^2\right) + \frac{P \cdot (x - a)^2}{2} \quad , \quad x \ge a \tag{97}$$

Prva od ovih jednačina daje ugibe u levom delu grede, a druga u desnom.
Uvrstimo li vrednost (d) u jed.(a), nalazimo:

$$\begin{aligned} EI_z \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{P \cdot b}{6 \cdot \ell} \cdot \left(\ell^2 - b^2 - 3x^2\right) \quad , \qquad x \le a \\ EI_z \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{P \cdot b}{6 \cdot \ell} \cdot \left(\ell^2 - b^2 - 3x^2\right) + \frac{P \cdot (x - a)^2}{2} \quad , \quad x \ge a \end{aligned} \tag{e}$$

Iz ovih jednačina može se izračunati nagib u nekoj tački elastične linije. Često su potrebne vrednosti nagiba na krajevima grede. Kad uvrstimo $x = 0$ u prvu od jed.(e), a $x = \ell$ u drugu i obeležimo nagibe na krajevima sa θ_1, odnosno θ_2, biće:

$$\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P \cdot b \cdot \left(\ell^2 - b^2\right)}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\ell} &= \frac{P \cdot b \cdot \left(\ell^2 - b^2 - 3\ell^2 + 3b \cdot \ell\right)}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} = \frac{P \cdot b \cdot \left[\ell^2 \cdot b^2 - 3\ell \cdot (\ell - b)\right]}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} \\ &= \frac{P \cdot b \cdot \left[(\ell - b) \cdot (\ell + b) - 3\ell \cdot a\right]}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} = \frac{P \cdot b \cdot \left[a \cdot (\ell + b) - 3 \cdot \ell \cdot a\right]}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} \\ &= \frac{P \cdot b \cdot a \cdot \left[\ell + b - 3\ell\right]}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} = \frac{P \cdot b \cdot a \cdot \left[-2\ell + b\right]}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} = -\frac{P \cdot b \cdot a \cdot \left[\ell - b + \ell\right]}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} \\ &= -\frac{P \cdot b \cdot a \cdot (\ell + a)}{6 \cdot \ell \cdot EI_z} \end{aligned} \tag{99}$$

Najveći ugib je u tački gde je tangenta elastične linije horizontalna. Ako je $a > b$ kao na slici, najveći ugib je očigledno u levom delu grede. Položaj te tačke možemo naći kad izjednačimo sa nulom prvi od izraza (e), tj.

$$\ell^2 - b^2 - 3x^2 = 0$$

odakle je:

$$x = \frac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\sqrt{3}} \tag{f}$$

Ovo je odstojanje tačke najvećeg ugiba od levog kraja grede. Da bismo našli taj najveći ugib, uvrstimo izraz (f) u jed.(96), tada je:

$$y_{\max} = \frac{P\cdot b}{6\cdot \ell \cdot EI_z}\cdot\frac{\sqrt{\ell^2-b^2}}{\sqrt{3}}\cdot\left(\ell^2-b^2-\frac{\ell^2-b^2}{3}\right)=\frac{P\cdot b}{6\cdot \ell \cdot EI_z}\cdot\frac{\sqrt{\ell^2-b^2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\cdot\left(\ell^2-b^2\right)}{3}$$

$$=\frac{P\cdot b\cdot\left(\ell^2-b^2\right)^{3/2}}{9\cdot\sqrt{3}\cdot\ell\cdot EI_z} \qquad \text{(g)}$$

Ako teret P napda sredinu raspona, najveći ugib je očigledno u tom preseku. Njegovu veličinu dobijamo kad stavimo $b=\ell/2$ u jed.(g):

$$(Y)_x=\ell/2=\frac{P\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\left(\ell^2-\frac{\ell^2}{4}\right)^{3/2}}{9\cdot\sqrt{3}\cdot\ell\cdot E\cdot I_z}=\frac{P\cdot\ell\cdot\sqrt{\left(3\cdot\ell^2\right)^3}}{2\cdot 8\cdot 9\cdot\sqrt{3}\cdot\ell\cdot E\cdot I_z}$$

$$=\frac{P\cdot\ell^3}{48\cdot E\cdot I_z} \qquad (100)$$

Iz jed.(f) možemo zaključiti da u slučaju grede savijene jednakim koncentrisanim teretom, najveći ugib je uvek blizu sredine grede. Ako je $b=l/2$, on je na sredini; u graničnom slučaju, kada je b vrlo malo, a P blizu oslonca, odstojanje x dato jed.(f) je $\frac{\ell}{\sqrt{3}}$ i najveći ugib je u odstojanju od sredine grede jednakom svega $\frac{\ell}{\sqrt{3}}-\frac{\ell}{2}=0{,}077\cdot\ell$

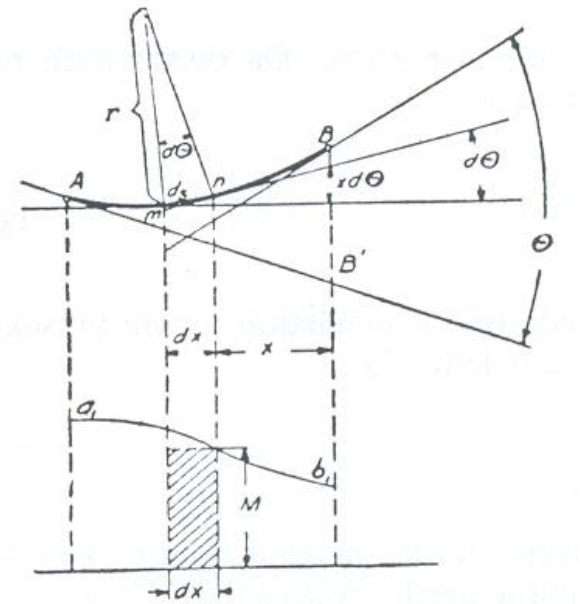
Na taj način je ugib na sredini uvek dobra aproksimacija najvećeg ugiba. Da bismo našli ugib na sredini stavimo $x=\ell/2$ u jed.(96), pa dpbijamo:

$$(Y)_{x=\ell/2}=\frac{P\cdot b\cdot\frac{\ell}{2}}{6\cdot\ell\cdot E\cdot I_z}\left(\ell^2-b^2-\frac{\ell^2}{4}\right)=\frac{P\cdot b}{12\cdot E\cdot I_z}\left(\frac{3\cdot\ell^2-4b^2}{4}\right)$$

$$=\frac{P\cdot b}{48\cdot E\cdot I_z}\left(3\cdot\ell^2-4\cdot b^2\right) \qquad (101)$$

Razlika između ugiba (g) i (91) u najnepovoljnijem slučaju, kada b teži nuli, je svega 2,5%.

30. ODREĐIVANJE UGIBA POMOĆU MOMENTNE POVRŠINE-METODA MOMENTNE POVRŠINE, MOHR-VA ANALOGIJA



U gornjem izlaganju je pokazano kako se elastična linija grede može naći integralenjem njene diferencijalne jednačine (89). U mnogim slučajevima, naročito kada se ne traži opšta jednačina elastične linije, već treba naći samo ugib u nekoj zadatoj tački, račun se može uprostiti primenom dijagrama napadnog momenta, kao što je to pokazano dole.

Na slici AB je deo elastične linije, a a_1b_1 odgovarajući deo momentnog dijagrama. Dva susedna preseka grede na rastojanju d_s seku se, posle savijanja, pod uglom d_θ, koji je prema jed.(54)

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$$
$$d_\theta = \frac{1}{r} \cdot d_s = \frac{M}{EI_z} \cdot d_s \qquad \text{(a)}$$

Interpretirano grafički, to znači da je elementarni ugao d_θ između dva susedna poluprečnika krivine (ili između dve susedne tangente elastične linije.) jednak šrafiranoj elementarnoj površini $M \cdot d_x$ dijagrama napadnog momenta podeljenoj krutošću grede. Kako ovo važi za svaki element, može se ugao θ između tangenata u tačkama A i B dobiti sabiranjem elemenata datih jedn.(a), tako da je:

$$\theta = \int_A^B \frac{1}{EI_z} \cdot M \cdot d_x \qquad (102)$$

tj. ugao između tangenata u tačkama A i B elastične linije jednak je površini dijagrama napadnog momenta između dve odgovarajuće vertikale, podeljenoj krutošću grede.

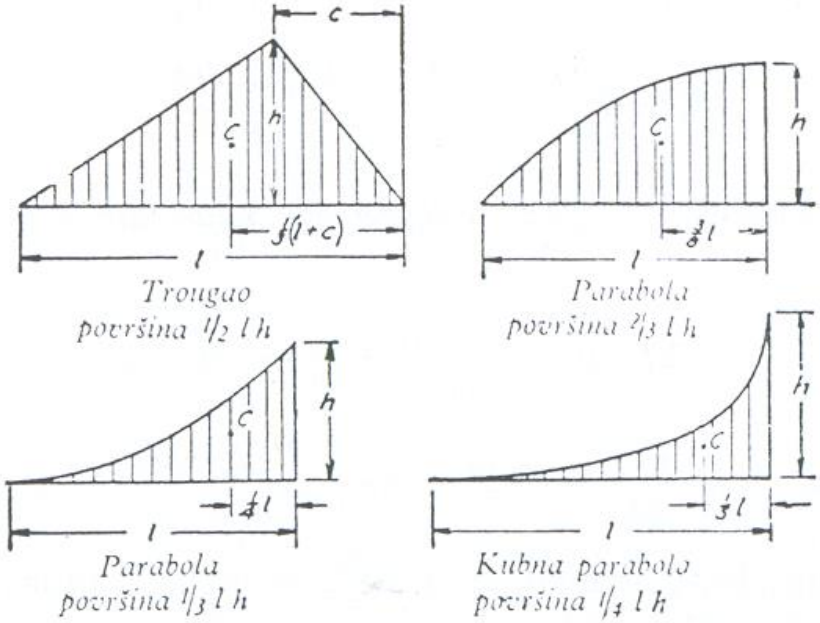
Posmatrajmo dalje odstojanje tačke B od tangente AB' u tački A. Kako je krivina elastične linije mala, to se odstojanje može meriti po vertikali BB'. Onaj deo tog odstojanje koji potiče od savijanja elementa mn grede i koji je ograničen sa dve susedne tangente u tačkama m i n jednak je:

$$X \cdot d_\theta = X \cdot \frac{M \cdot d_x}{EI_z}$$

Inerpretirano grafički, to je moment šrafirane površine $M \cdot d_x$ u pogledu vertikale kroz B podeljeni sa $E \cdot I_z$. Intergralenjem dobijamo ukupan ugib BB'

$$\overline{BB'} = \delta = \int_A^B \frac{1}{EI_z} \cdot X \cdot M \cdot d_x \qquad (103)$$

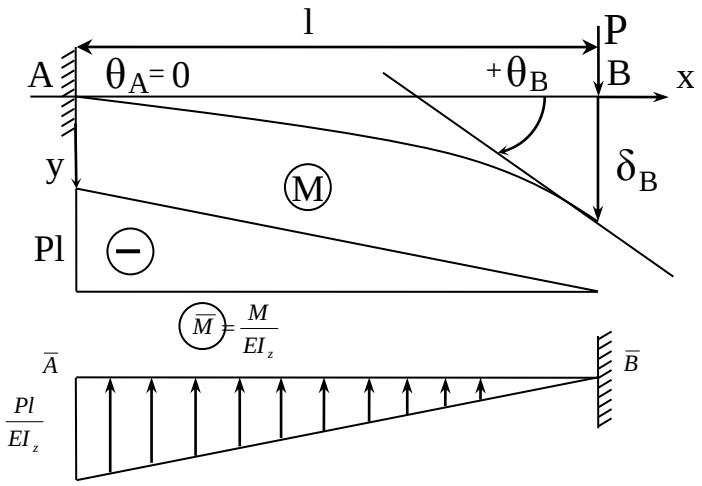
tj. odstojanje tačke B od tangente u tački A je jednak momentu momentne površine između A i B u pogledu vertikale kroz B, podeljenom krutošću grede. pomoću jed.(102) i (103) može se lako izračunati nagib elastične linije i veličina ugiba u nekom preseku grede. Izračunavamo najpre apsolutne vrednosti za θ i δ. Tada uzimajući pozitivne smerove koordinatnih osa kao u slučaju rešavanja difer. jednačina, obrtanje tangente elastične linije smatramo kao pozitivno ako je ono u smeru obrtanja kazaljke na satu, a ugib grede pozitivan ako je on u smeru pozitivne y ose. Ova metoda izračunavanja ugiba zove se metodom momentne površine.



Izračunavanje integrala u jed.(102) i (103) često se može zameniti jednostavnom primenom poznatih obrazaca za površine i položaj njihovih težišta. Nekoliko obrazaca, na koje često nailazimo u primenama, dato je na donjoj slici.

31. ODREĐIVANJE UGIBA KONZOLE POMOĆU MOMENTNE POVRŠINE

Objašnjen način određivanja ugiba praktično je najednostavnije provoditi sračunavanjem momenta i transferzalne sile na fiktivnom nosaču.



$$\delta_B = \overline{M_B} = \frac{1}{EI_z}\cdot P\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot \ell = \frac{P\cdot \ell^3}{3\cdot EI_z}$$

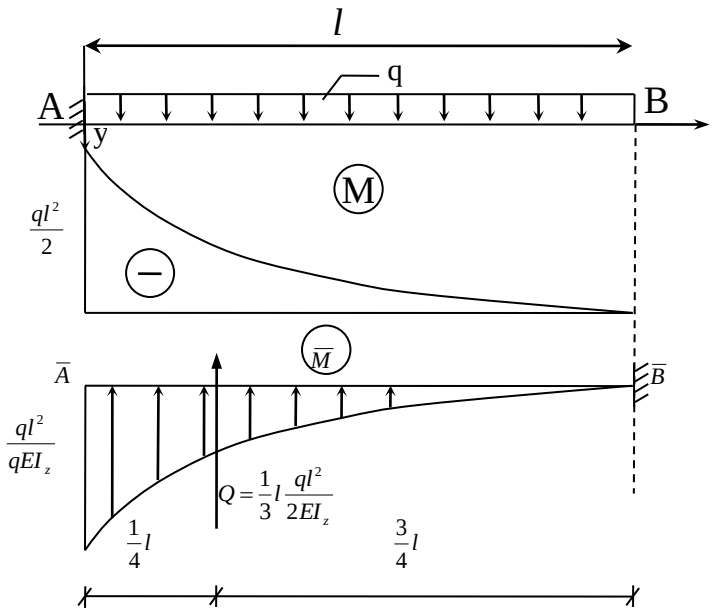
$$\theta_B = \overline{T_B} = \left(\frac{1}{EI_z}\cdot P\cdot \ell\cdot\frac{\ell}{2}\right) = \frac{P\cdot \ell^2}{2\cdot EI_z}$$

Fiktivni nosač u slučaju konzole bira se tako što se uklještenje za fiktivni nosač premesti na slobodan kraj zadanog nosača. Razlog za ovo leži u tome što se moraju zadovoljiti konturni uslovi:

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 & M_A=-M_{ext.} & \delta_A=0 \\ x=\ell & M_B=0 & \delta_B=+\delta_{ext.} \end{array}\right\} \text{na zadanom nosaču}$$

za

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 & \overline{M_A}=0 & \delta_A=0 \\ x=\ell & \overline{M_B}=+M_{ext.} & \delta_B=+\delta_{ext.} \end{array}\right\} \text{na fiktivnom nosaču}$$



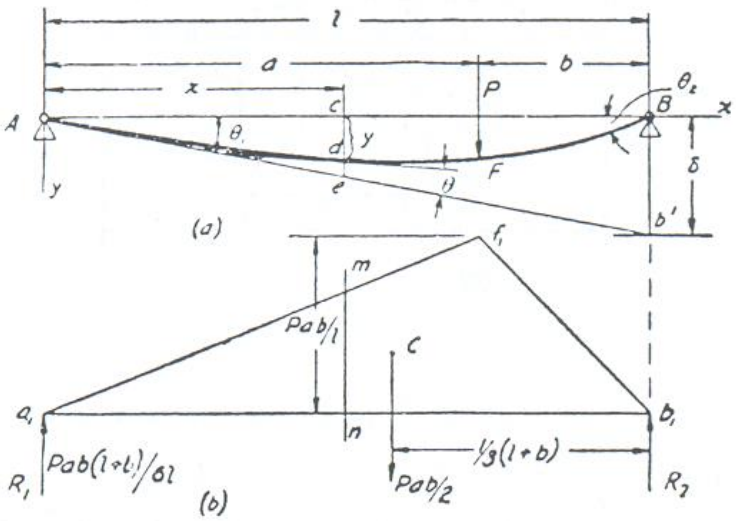
$$M_A = \frac{-q\cdot \ell^2}{q}$$

$$\delta_B = \overline{M_B} = Q\cdot\frac{3}{4}\cdot \ell = \frac{q\cdot \ell^4}{8\cdot EI_z}$$

$$\theta_B = \overline{T_B} = Q = \left(\frac{q\cdot \ell^3}{6\cdot EI_z}\right) = \frac{q\cdot \ell^3}{6\cdot EI_z}$$

32. ODREĐIVANJE UGIBA PROSTE GREDE POMOĆU MOMENTNE POVRŠINE

Fiktivni nosač kod proste grede ostaje na nepromenjenim osloncima jer problem nesaglasnosti konstruktivnih uslova se ne pojavljuje.



$$x=0 \quad M_A=0 \quad \delta_A=0$$

$$x=\ell \quad M_B=0 \quad \delta_B=0$$

$$R_A=\frac{P\cdot\ell}{\ell}$$

$$M_C=R_A\cdot a=\frac{P\cdot a\cdot b}{\ell}$$

$$\overline{R_A}=\frac{1}{\ell}\cdot\frac{P\cdot a\cdot b}{2\cdot EI_z}\cdot\frac{1}{3}(\ell+b)$$

$$y=\overline{M}_{(x)}=\overline{R_A}\cdot x-\frac{P\cdot x\cdot b}{\ell\cdot EI_z}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x$$

$$=\frac{P\cdot a\cdot b\cdot x}{6\cdot\ell\cdot EI_z}\cdot(\ell+b)-\frac{P\cdot b\cdot x^3}{6\cdot\ell\cdot EI_z}$$

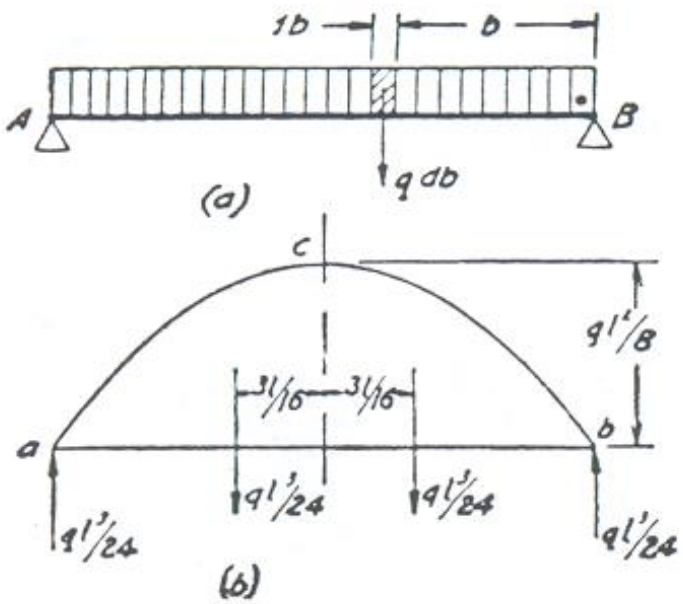
$$=\frac{P\cdot b\cdot x}{6\cdot\ell\cdot Ei_z}\left((\ell-b)\cdot(\ell+b)-x^2\right)$$

$$\boxed{y=\frac{P\cdot b\cdot x}{6\cdot\ell\cdot EI_z}\cdot\left(\ell^2-b^2-x^2\right)}$$

Ova jednačina ugibne linije se poklapa sa izvedenom jed.(96)

$$\theta_A=\overline{R_A}=\frac{P\cdot b}{6\cdot\ell\cdot Ei_z}\cdot\left((\ell-b)\cdot(\ell+b)\right)=\frac{P\cdot b}{6\cdot\ell\cdot Ei_z}\cdot\left(\ell^2-b^2\right)$$

Posmatrajmo sada prostu gredu pod jednako podeljenim opterećenjem q.



$$Q=\overline{R_A}=\overline{R_B}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{q\cdot\ell^2}{8\cdot Ei_z}=\frac{q\cdot\ell^3}{24\cdot EI_z}$$

$$\theta_A=-\theta_B=\frac{q\cdot\ell^3}{24\cdot EI_z}$$

$$\delta_C=\overline{M_C}=\overline{R_A}\cdot\frac{\ell}{2}-Q\cdot\frac{3\ell}{16}$$

$$=\frac{q\cdot\ell^4}{48\cdot EI_z}-\frac{q\cdot\ell^4}{16\cdot 8\cdot EI_z}=\frac{(8-3)\cdot q\cdot\ell^4}{384\cdot EI_z}$$

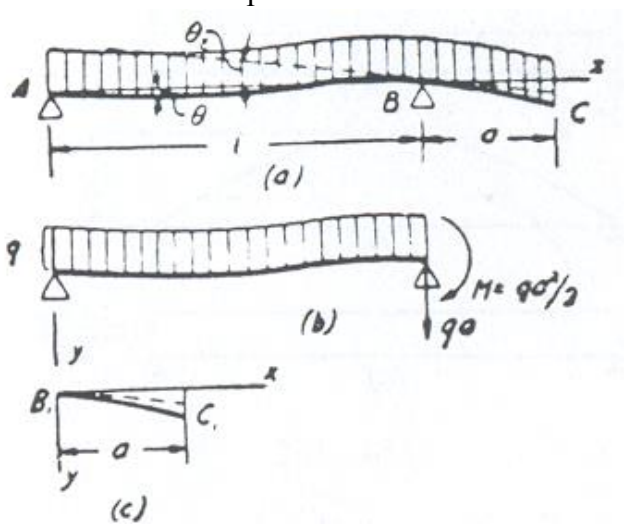
$$\delta_C=\frac{5\cdot q\cdot\ell^4}{384\cdot EI_z}$$

33. METODA SUPERPOZICIJE

Iz razmatranja metode momentne površine vidi se da su ugibi grede potpuno definisani dijagramom napadnog momenta.
Iz definicije napadnog momenta sledi da napadni moment prouzrokovan u bilo kom poprečnom preseku grede od više poprečnih opterećenja, koja deluju istovremeno, jednak je sumi napadnih momenata u istom preseku usled opterećenja koja bi delovala pojedinačno. Iz ovoga sledi da ugib izazvan sistemom poprečnih opterećenja, koja deluju istovremeno, u bilo kojoj tački grede može da se dobije sabiranjem ugiba koje su u toj tački proizvela pojedinačna opterećenja.

34. UGIB GREDA SA PREPUSTIMA

Greda sa prepustom može da se podeli na dva dela; onaj između ležišta, koji se može posmatrati kao prosta greda, i prepust koji se može posmatrati kao konzola. Kao primer posmatrajmo savijanje grede sa prepustom jednoliko podeljenim opterećenjem q. Jednačina ugibne linije usled q grede AB već imamo. Sračunajmo ugibnu liniju grede AB usled momenta $\frac{q \cdot a^2}{2}$ metodom momentne površine.



$$\overline{R_A} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{1}{3} \cdot \ell = \frac{q \cdot a^2 \cdot \ell}{12 \cdot EI_z}$$

$$\overline{q} : x = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot EI_z} : \ell \qquad \overline{q} = \frac{q \cdot a^2 \cdot x}{2 \cdot \ell \cdot EI_z}$$

$$y = -\frac{q \cdot a^2 \cdot \ell}{12 \cdot EI_z} \cdot x + \frac{q \cdot a^2 \cdot x}{12 \cdot EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$y = -\frac{q \cdot a^2 \cdot \ell \cdot x}{12 \cdot EI_z} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)$$

Ukupni ugib je dakle

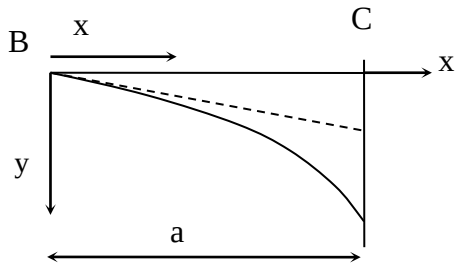
$$y = \frac{q}{24 \cdot EI_z} \cdot \left(\ell^3 \cdot x - 2 \cdot \ell \cdot x^3 + x^4\right)$$

Pri proračunu nagiba u tački B postupamo na isti način stim što sila $q \cdot a$ ne utiče na taj nagib jer se ta sila direktno prenosi na ležište.

$$\overline{R_B} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell = \frac{q \cdot a^2 \cdot \ell}{6 \cdot EI_z}$$

$$\theta_B = \frac{q \cdot a^2 \cdot \ell}{6 \cdot EI_z} - \frac{q \cdot \ell^3}{24 \cdot EI_z}$$

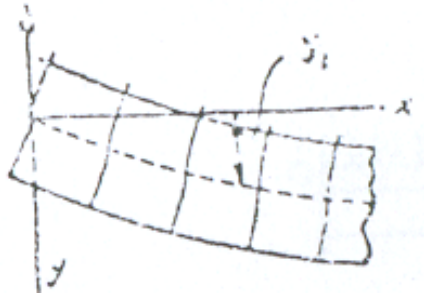
Ugib u nekom preseku prepusta nalazimo superpozicijom ugiba konzole i ugiba.



$$\theta_B \cdot x = \left(\frac{q \cdot a^2 \cdot \ell}{6 \cdot EI_z} - \frac{q \cdot \ell^3}{24 \cdot EI_z}\right) \cdot x$$

35. UTICAJ TRANSVERZALNE SILE NA UGIB GREDE

U dosadasnjim izlaganjima posmatrali smo samo uticaj napadnog momenta na ugib. transverzalna sila stvara dopunski ugib na taj način što susedni preseci klize jedan prema drugom. Usled nejednolike raspodele napona smicanja presek, koji je bio ravan, iskrivi se, kao na sl., gde je prikazano savijanje usled samog smicanja. Elementi preseka blizu središta ostaju vertikalni i klize jedan prema drugom: usled toga je nagib elastične linije izazvan smicanjem u svakom preseku jednak klizanju u težištu tog preseka. Ako obeležimo sa y_1 ugib usled smicanja, odgovarajući nagib elastične linije u nekom preseku biće



$$\frac{d_{y_1}}{d_x}=\frac{\left(\tau_{yx}\right)\cdot y=0}{G}=\alpha\cdot\frac{1}{G}\cdot\frac{V}{A} \qquad \text{(a)}$$

gde je V/A prosečni napon smicanja τ_{xy}, G modul klizanja, a α brojni koeficijent, kojim treba pomnožiti prosečni napon smicanja, da bi se dobio napon smicanja u težištu preseka. Za pravougaoni presek smo imali $\alpha=\frac{3}{2}$ (jed.80), a za kružni $\alpha=\frac{4}{3}$ (jed.82).

Ako je opterećenje podeljeno duž grede, transverzalna sila V je neprekidna funkcija, koja se sme diferencijaliti po x, tada je krivina usled samog smicanja jednaka

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\alpha}{A\cdot G}\cdot\frac{dV}{dx}=-\frac{\alpha}{A\cdot G}\cdot q \qquad \text{(b)}$$

Zbir ove krivine i krivine izazvane napadnim momentom (89) iznosi

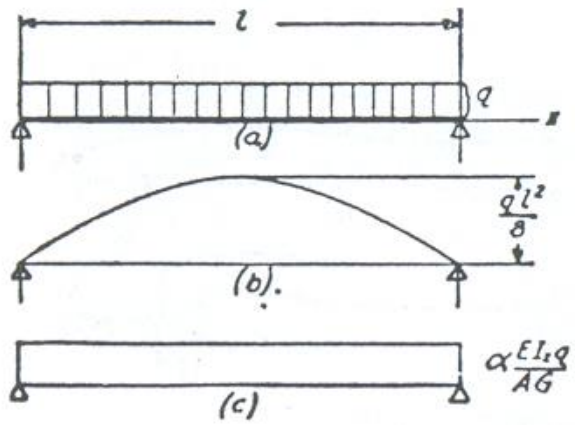
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{EI_z}\cdot\left(M+\frac{\alpha\cdot EI_z}{A\cdot G}\cdot q\right) \qquad (104)$$

Ova se jednačina mora koristiti umesto jed.(89) za određivanje nagiba u svim slučajevima kada se uticaj transverzalne sile mora uzeti u obzir.

Ako su M i q poznate funkcije od x, jed.(104) može se lako intergraliti na isti način kao što je bilo prikazano u (čl.28). I u ovom slučaju može se primeniti metoda konjugovane grede (čl.32) uzevši za ordinate dijagrama zamišljenog opterećenja.

$$\left[M+\alpha\cdot\frac{EI_z}{A\cdot G}\cdot q\right]\cdot\frac{1}{Ei_z} \qquad \text{(c)}$$

Izračunajmo prvo dopunski ugib izazvan tranverzalnom silom.



$$\delta_{b,c}=\overline{M}_{b,c}=\alpha\cdot\frac{q}{A\cdot G}\cdot\frac{\ell^2}{8}=\frac{\alpha\cdot\ell^2\cdot q}{8\cdot A\cdot G}$$

Dodavanjem ugiba usled momenta M $\delta_{a,c}$ imamo

$$\delta_c=\delta_{a,c}+\delta_{b,c}=\frac{5\cdot q\cdot\ell^4}{384\cdot EI_z}+\frac{\alpha\cdot\ell^2\cdot q}{8\cdot A\cdot G}$$

$$\delta_c=\frac{5}{384}\cdot\frac{q\cdot\ell^4}{EI_z}\cdot\left(1+\frac{48\cdot\alpha}{5}\cdot\frac{k_z}{\ell^2\cdot A}\cdot\frac{E}{G}\right) \qquad \text{(d)}$$

U (d) je $k_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$ poluprečnik inercije preseka u pogledu z ose. Za pravougaoni presek visine h, $k_z=\frac{h^2}{12}$, $\alpha=\frac{3}{2}$. Ako usvojimo $\frac{E}{G}=2\cdot(1+\mu)=2\cdot(1+0,3)=2,6$, dobijamo iz (d)

$$\delta_c=\frac{5}{384}\cdot\frac{q\cdot\ell^4}{EI_z}\cdot\left(1+\frac{48\cdot 3}{5\cdot 2}\cdot\frac{1}{12}\cdot 2,6\cdot\frac{h^2}{\ell^2}\right)=\frac{5}{384}\cdot\frac{q\cdot\ell^4}{EI_z}\cdot\left(1+3,12\cdot\frac{h^2}{\ell^2}\right)$$

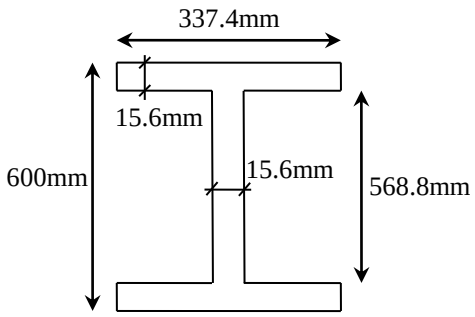
Vidi se da je za $\frac{\ell}{h}=10$ uticaj transverzalne sile na ugib oko 3%. Kad se odnos ℓ/h smanjuje, taj efekat raste.

Množilac α je obično za I grede veći od 2 i u slučaju kada je ona kratka, uticaj transverzalne sile može postati znatan. Iz jed.(84) imamo

$$\alpha\cdot\frac{V}{A}=\frac{V}{b_1\cdot I_z}\cdot\left[\frac{b\cdot h^2}{8}-\frac{h_1^2}{8}\cdot(b-b_1)\right]$$, odakle je

$$\alpha=\frac{A}{b_1\cdot I_z}\cdot\left[\frac{b\cdot h^2}{8}-\frac{h_1^2}{8}\cdot(b-b_1)\right] \qquad \text{(e)}$$

Uzmimo za primer:



$A=194cm^2$, $I_z=109800cm^4$

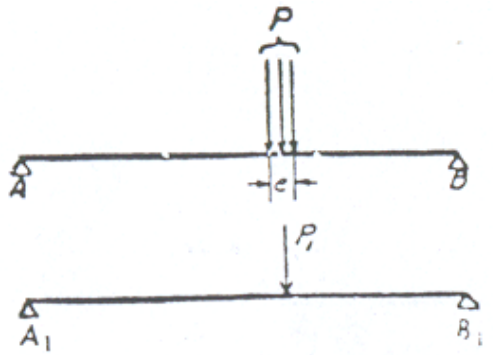
$\alpha=2,42$

Usvojimo dalje $\ell=6\cdot h$ pa je prema jed.(d)

$$\delta_c=\frac{5}{384}\cdot\frac{q\cdot\ell^4}{EI_z}\cdot\left(1+\frac{48}{5}\cdot 2,42\cdot\frac{109800}{194}\cdot\frac{1}{(6\cdot 60)^2}\cdot 2,6\right)$$

$$\delta_c=1,265\cdot\frac{5\cdot q\cdot\ell^4}{384\cdot EI_z}$$

Dopunski ugib izazvan smicanjem u ovom slučaju je 26,5% od ugiba usled napadnog momenta, te se mora uzeti u obzir.



Razmotrimo dalje slučaj koncetrisanog tereta prikazanog na prostoj gredi. Slučaj koncentrisanog tereta možemo posmatrati kao granični slučaj tereta raspoređenog na vrlo kratkom delu grede e; Veličina zamišljenog opterećenja P_1 konjugovane grede $\overline{AB}$

$$P_1=\alpha\cdot\frac{EI_z}{A\cdot G}\cdot P \qquad \text{(f)}$$

$$\delta_c=\overline{M_c}=\alpha\cdot\frac{P}{A\cdot G}\cdot\frac{\ell}{4} \qquad \text{(g)}$$

Ovo rešenje odgovara teretu na sredini grede.

Kada dodamo ovako sračunat ugib usled transverzalne sile ugiba usled napadnog momenta (jed.100) imamo:

$$\delta_c=\frac{P\cdot\ell^3}{48\cdot EI_z}+\alpha\cdot\frac{P}{A\cdot G}\cdot\frac{\ell}{4}=\frac{P\cdot\ell^3}{48\cdot EI_z}\cdot\left(1+12\cdot\alpha\cdot\frac{I_z}{A}\cdot\frac{1}{\ell^2}\cdot\frac{E}{G}\right)$$

Za pravougaonu gredu $I_z/A=\frac{h^2}{12}$, $\alpha=\frac{3}{2}$, $\frac{E}{G}=2,6$ pa je:

$$\delta_c=\frac{P\cdot\ell^3}{48\cdot EI_z}\cdot\left(1+12\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{h^2}{\ell^2}\cdot 2,6\right)=\frac{P\cdot\ell^3}{48\cdot EI_z}\cdot\left(1+3,90\cdot\frac{h^2}{\ell^2}\right) \qquad \text{(h)}$$

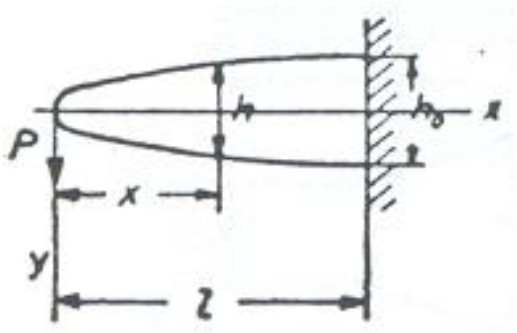
Za $h/\ell=1/10$ naknadni uticaj transverzalne sile je oko 4%.

*Rešenje (h) dobiveno uz pretpostavke iz člana 23 ne odgovara potpuno pretpostavkama kada je u pitanju koncentrisana sila na sredini grede, jer je na sredini grede transverzalna sila nula, a postoji neposredno levo i desno od preseka i jednaka je $P/2$. Rešenje (h) precenjuje ugib usled smičuće sile.

V. GREDE PROMENJIVOG PRESEKA. GREDE OD DVA RAZLIČITA MATERIJALA

36. GREDE PROMENJIVOG PRESEKA

Do sada su proučavane grede prizmatičnog oblika. Detaljnija proučavanja pokazuju da se jed. $\frac{1}{r}=\frac{M}{EI_z}$ i $\sigma_x=\frac{M\cdot y}{I_z}$ izvedene za prizmatične štapove mogu sa dovoljnom tačnošću primeniti i na grede promenjivog preseka, ako te promene nisu suviše velike. Slučajevi nagle promene preseka, kada se javlja znatna koncentracija napona, biće proučeni kasnije.



Konzola jednake otpornosti je ona kod koje se otporni moment preseka menja po dužini grede u istom odnosu u kojem se menja i napadni moment. U tom slučaju $(\sigma_x)_{\max}=\frac{M}{W}=const.$ na ukupnoj dužini grede i može se uzeti da je jednako σ_w. Sa gledišta utrošenog materijala ovo je vrlo povoljno, jer svaki presek ima samo toliku površinu koliko treba da se zadovolji uslov sigurnosti.

Kako je $M_{(x)}=P\cdot x$,da bi dobili konzolu jednake otpornosti mora, dakle, otporni moment preseka biti proporcionalan x. Ovaj uslov se može ispuniti na više načina.

1. Pravougaoni presek konstantne širine b i promenjive visine h.

$$\frac{M}{W}=\frac{P\cdot x}{\frac{b\cdot h^2}{6}}=const.=\frac{6\cdot P\cdot \ell}{b\cdot h_0^2}$$

h_0 je visina grede na uklještenom kraju. Tada je

$$\frac{x}{h^2}=\frac{\ell}{h_0^2}\ ,\ h^2=\frac{h_0^2\cdot x}{\ell}\ ,\ h=h_0\cdot\left(h/\ell\right)^{1/2}$$

Visina konzole se menja po zakonu parabole, a na slobodnom kraju je jednaka nuli. U ovom rezultatu je zanemaren uticaj napona smicanja. U praktičnim primenama mora se o ovome voditi računa i uneti promene u izvedenom izrazu. Ugib grede na kraju nalazimo prema izrazu (103)

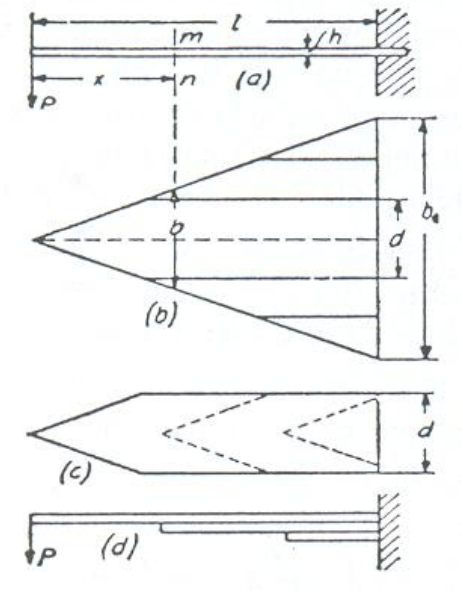
$$\delta=\int_6^{\ell}\frac{12\cdot P\cdot x^2}{E\cdot b\cdot h^3}\cdot dx=\frac{12\cdot P}{E\cdot b}\cdot\int_0^{\ell}\frac{x^2\cdot \ell^{3/2}}{h_1^3\cdot x^{3/2}}=\frac{12\cdot P\cdot \ell^{3/2}}{E\cdot b\cdot h_0^3}\cdot\int_0^{\ell}\sqrt{x}\cdot dx$$

$$=\frac{12\cdot P\cdot \ell^{3/2}}{E\cdot b\cdot h_0^3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_0^{\ell}=\frac{12\cdot P\cdot \ell^{3/2}}{E\cdot b\cdot h_0^3}\cdot\frac{2}{3}\cdot \ell^{3/2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{P\cdot \ell^3}{E\cdot\left(\frac{b\cdot h_0^3}{12}\right)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{P\cdot \ell^3}{E\cdot I_0}$$

gde je $I_0=\frac{b\cdot h_0^3}{12}$ moment inercije površine preseka na uklještenom kraju.

Iz upoređenja sa izrazom $\frac{P\cdot \ell^3}{3\cdot EI_z}$ vidimo da je nađeni ugib dva puta veći od ugiba prizmatičnog štapa krutosti EI_z, opterećenog istom silom. To znači da štap ima otpornost, ali nema istu krutost kao prizmatičan štap.

2. Konzola pravougaonog preseka konstantne visine i promenjive širine b.



Kako je uslov da naponi ostanu konstantni selom dužinom konzole, možemo koristiti izraz za napon

$$\sigma_x = \frac{E \cdot y}{r}$$

za $y = h/2$ imamo

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E \cdot h}{2 \cdot r}$$

(a)

Za izračunavanje ugiba na kraju uvodimo pretpostavku da je u slučaju malog ugiba $\delta = \frac{\ell^2}{2 \cdot r}$, ugib na kraju kružnog luka

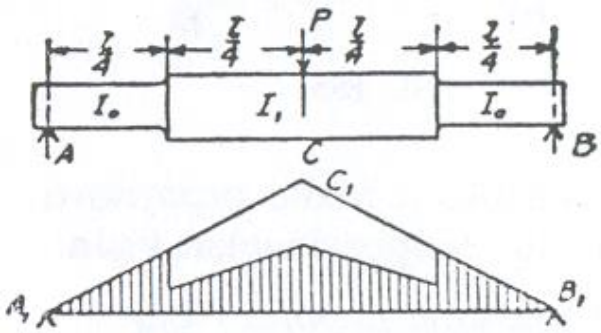
$$\delta = \frac{\ell^2}{\frac{E \cdot h}{(\sigma_x)_{\max}}} = (\sigma_x)_{\max} \cdot \frac{\ell^2}{E \cdot h} \qquad (106)$$

Kao što se vidi iz jed, za posmatrani tip konzole jednake otpornosti ugib na kraju je proporcionalan kvadratu dužine, a obrnuto proporcionalan visini.

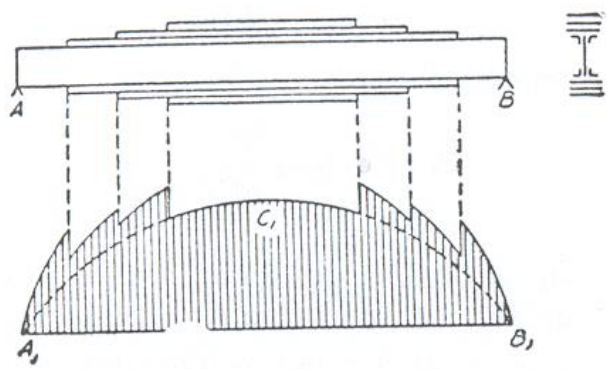
Metoda konjugovane grede može se primeniti takođe i na izračunavanje ugiba greda promenjivog preseka. U tom slučaju treba samo imati u vidu da je krivina elastične linije u nekom poprečnom preseku jednaka $\frac{M}{EI_z}$. Prema tome povećanje krutosti u nekom preseku imaisti uticaj na ugib, kao što bi ga imalo smanjenje napadnog momenta u tom preseku u istom odnosu. Problem savijanja greda promenjivog preseka može se, dakle, svesti na problem savijanja greda stalnog presekaprimenom REDUKOVANOG DIJAGRAMA NAPADNOG MOMENTA, gde je svaka ordinata pomnožena sa I_0/I; I je moment inercije u posmatranom preseku, a I_0 konstantni moment prizmatičnog štapa, koji ima isti ugib kao i štap promenjivog preseka.

Posmatrajmo dva karakteristična primera:

Savijanje kružnog vratila silom P



Sve ordinate dijagrama na srednjem delu treba izmnožiti sa odnosom I_0/I_1 pa se dobija šrafirani dijagram zamenjujućeg opterećenja, a ugib se računa kao za vratilo konstantnog momenta inercije I_0.

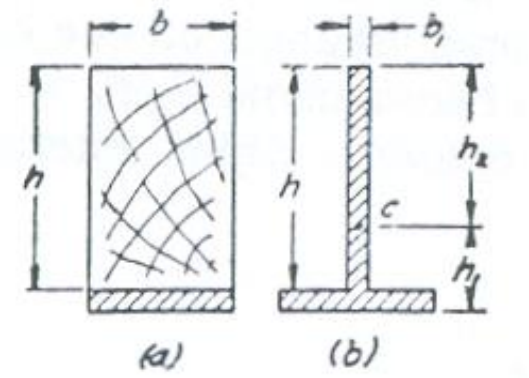


Savijanje limenog I nosača promenjivog preseka jednako raspodeljenim opterećenjem.

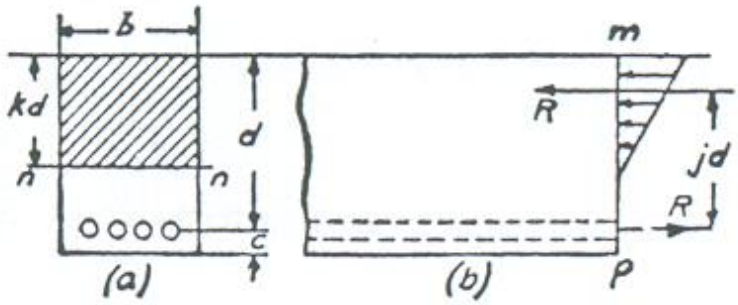
U ovom primeru sve ordinate krajnjih delova treba množiti sa odnosom I_{sr}/I_i pa se dobija šrafirani dijagram zamenjujućeg opterećenja, a ugib se računa kao za prostu gredu konstantnog momenta inercije I_{sr}.

37. SIMETRIČNE GREDE OD DVA RAZLIČITA MATERIJALA

Ima slučajeva kada se primenjuju grede napravljane od dva ili više različitih materijala. Na sl. je prikazan jednostavan slučaj drvene grede ojačane čeličnom trakom učvršćenom zavrtnjima na donjoj strani grede. pretpostavljajući da pri savijanju nema klizanja između čelika i drveta, možemo primeniti teoriju savijanja monolitnih greda. Prema toj teoriji izduženja i skraćenja uzdužnih vlakana su proporcionalna njihovom odstojanju od neutralne ose. Kako je modul elastičnosti drveta znatno manji od onog za čelik, drveni deo grede se savija kao ekvivalentno na čelično rebro, znatno manje širine, prikazano na sl.b. Za izračunavanje momenta unutrašnjih sila za zadatu krivinu, tj. za zadata izduženja i skraćenja, mora se uzeti kao širina tog rebra. $\left| b_1 = b \cdot \frac{E_{dr.}}{E_{čel.}} \right|$ Na taj način zadatak je sveden na problem savijanja čelične grede, zvane transformisani presek, koji se može rešiti prema pređašnjoj teoriji.



38. GREDE OD ARMIRANOG BETONA



Poznatno je da je otpornost betona prema pritisku mnogo veća od one prema zatezanju. Prema tome će se greda od betona slomiti usled napona zatezanja na konveksnoj strani. Greda se može znatno ojačati dodavanjem čeličnih šipki na konveksnoj strani , kao što je prikazano na slici. Kako beton čvrsto prijanja za čelik, pri savijanju se ne javlja klizanje čeličnih šipki u odnosu na beton, mogu se dakle i ovde primeniti metode razvijene u prethodnom članu za sračunavanje napona. U praksi se obično površina preseka čeličnih šipki bira tako da napon zatezanja u betonu na konveksnoj strani prevaziđe njegove granice kidanja pre nego što počne tečenje čelika, što znači da kod većih opterećenja ukupno zatezanje preuzima sam čelik. Iz ovog razloga u praksi, pri izračunavanju napona savijanja u armiranobetonskim gredama, pretpostavlja se da čelik prima ukupno zatezanje, a beton ukupan pritisak.

Ako zamenimo sile zatezanja u čeličnim šipkama njihovom rezultantom R, raspodela unutrašnjih sila po poprečnom preseku mp biće ona prikazana na slici (b). Ako pretpostavimo, kao i do sada, da poprečni presek ostaje pri savijanju ravan i obeležimo sa $k \cdot d$ odstojanje neutralne ose nn od gornje ivice (k je brojni koeficijent manji od 1) najveće uzdužno specifično skraćenje betona ε_c i specifično izduženje čeličnih šipki ε_s biće određeno jednačinama $\left(\varepsilon = \frac{y}{r} \right)$

$$\varepsilon_c = -\frac{k \cdot d}{r} \quad ; \quad \varepsilon_s = \frac{(1-k) \cdot d}{r} \qquad \text{(a)}$$

Ponašanje betona ne odgovara Hooke-ovu zakonu i dijagram ispitivanja na pritisak za taj materijal ima sledeći oblik. Kada napon pritiska raste, smanjuje se nagib tangente dijagrama, tj. modul se smanjuje pri porastu napona. Pri izračunavanju napona u arm.betonskim gredama u praksi se pretpostavlja da Hook-ov zakon važi za beton, a da bi se kompezirala promenjivost modula, uzima se za taj modul manja vrednost od one koju daje ispitivanje pri mali naponima. Obično se za armirani beton uzima $E_s/E_c = 15$. Tada iz jed.(a) dobijamo najveći napon pritiska u betonu i napon zatezanja u čeliku.

$$\sigma_c = -\frac{k \cdot d}{r} \cdot E_c \quad ; \quad \sigma_s = \frac{(1-k) \cdot d}{r} \cdot E_s \tag{b}$$

Izračunajmo sad položaj neutralne ose iz uslova da se normalne sile na poprečnom preseku mp redukuju na spreg sa momentnom jednakim napadnom momentu. Zbir sila pritiska u betonu mora biti jednak sili zatezanja R u čeličnim šipkama, a to znači

$$-b \cdot k \cdot d \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_c = \sigma_s \cdot A \cdot s \tag{c}$$

As je ukupna površina preseka šipki. Ako uvedemo oznake $\boxed{\frac{A_s}{b \cdot d} = p}$ i $\boxed{\frac{E_s}{E_c} = n}$ dobijamo iz (c) i (b)

$$k^2 = 2 \cdot (1-k) \cdot \frac{A_s}{b \cdot d} \cdot \frac{E_s}{E_c} = 2 \cdot (1-k) \cdot p \cdot n \tag{d}$$

Iz jed.(d) imamo

$$k^2 + 2 \cdot k \cdot p \cdot n - 2 \cdot p \cdot n = 0 \quad , \quad k_1/2 = \frac{-2 \cdot p \cdot n \pm \sqrt{4 \cdot p^2 \cdot n^2 + 8 \cdot p \cdot n}}{2}$$

odakle je

$$\boxed{k = -n \cdot p + \sqrt{(n \cdot p)^2 + 2 \cdot n \cdot p}} \tag{107}$$

<u>podatak koji određuje položaj neutralne ose.</u>

Prema jed.(b) odnos između najvećeg napona u betonu i naponu u čeliku je

$$-\frac{\sigma_e}{\sigma_s} = \frac{\frac{k \cdot d}{r} \cdot E_c}{\frac{(1-k) \cdot d}{r} \cdot E_s} = \frac{k}{(1-k) \cdot n} \tag{108}$$

Rastojanje $j \cdot d$ između rezultanata R sila pritiska i zatezanja koje napadaju poprečni presek grede je j (numerički faktor manji od 1).

$$j \cdot d = \frac{2}{3} \cdot k \cdot d + (1-k) \cdot d = \left(1 - \frac{k}{3}\right) \cdot d \quad , \quad \boxed{j \cdot d = \left(1 - \frac{k}{3}\right) \cdot d} \tag{109}$$

a moment unutrašnjih sila, jednak napadnom momentu M

$$j \cdot d \cdot R = j \cdot d \cdot A_s \cdot \sigma_s = -\frac{j \cdot k \cdot b \cdot d^2}{2} \cdot \sigma_c = M \quad ,$$

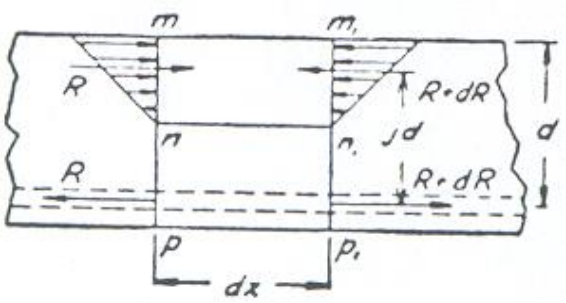
odakle je

$$\boxed{\sigma_s = \frac{M}{j \cdot d \cdot A_s}} \quad , \tag{110}$$

$$\boxed{\sigma_c = -\frac{2 \cdot M}{j \cdot k \cdot b \cdot d^2}} \quad , \tag{111}$$

Pomoću jed. (107), (109), (110) i (111) obično se izračunavaju naponi savijanja u gredama od armiranog betona.

39. NAPONI SMICANJA U ARMIRANOBETONSKIM GREDAMA



Pomoću iste metode kao u članu 23. posmatrajući element mnm_1n_1 između dva susedna preseka mp i m_1p_1, možemo zaključiti da će najveći napon smicanja τ_{xy} delovati u neutralnoj površini nn_1.

Ako obeležimo sa dR razliku između sila pritiska betona u presecima mp i m_1p_1, nalazimo napon smicanja u neutralnoj površini iz jed.

$$\left(\tau_{xy}\right)_{\max} \cdot b \cdot dx = dR$$

odakle je

$$\left(\tau_{xy}\right)_{\max} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dR}{dx} \qquad \text{(a)}$$

kako je napadni moment $M = R \cdot d \cdot j$,

jednačina (a) dobija oblik

$$\left(\tau_{xy}\right)_{\max} = \frac{1}{b \cdot j \cdot d} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{V}{b \cdot j \cdot d} \qquad \text{(b)}$$

gde je V transverzalna sila u posmatranom preseku. Uzevši u obzir jed.(109) nalazimo iz poslednje jednačine

$$\boxed{\left(\tau_{xy}\right)_{\max} = \frac{3 \cdot V}{b \cdot d \cdot (3-k)}} \qquad (112)$$

U praktičnim proračunima igraju ulogu ne samo naponi smicanja u neutralnoj površini, već i naponi smicanja na kontaktnoj površini čelika i betona. Posmatrajući opet prethodnu sliku vidimo da je razlika između sila zatezanja čeličnih šipki u tim presecima

$$j \cdot d \cdot dR = dM = \frac{dM}{dx} \cdot dx \quad , \quad dR = \frac{V \cdot dx}{j \cdot d}$$

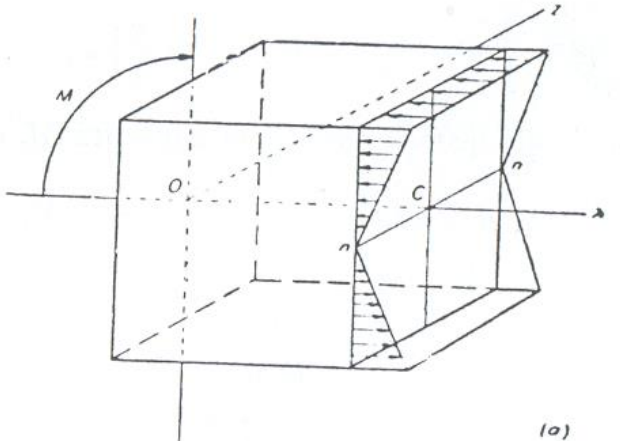
Sa ovom razlikom stoje u ravnoteži naponi smicanja na površini štapova. Ako obeležimo sa A ukupnu bočnu površinu čeličnih šipki na jedinici dužine grede, napon smicanja na toj površini biće

$$\boxed{\frac{dR}{A \cdot dx} = \frac{V}{A \cdot j \cdot d} = \frac{3 \cdot V}{(3-k) \cdot d \cdot A}} \qquad (113)$$

Ovaj napon postaje veći od napona u neutralnoj površini jed.(112), ako je A manje od b. Da bi se povećalo A, a u isto vreme ostala ista površina preseka čelika, treba samo povećati broj štapova i smanjiti njihov prečnik.

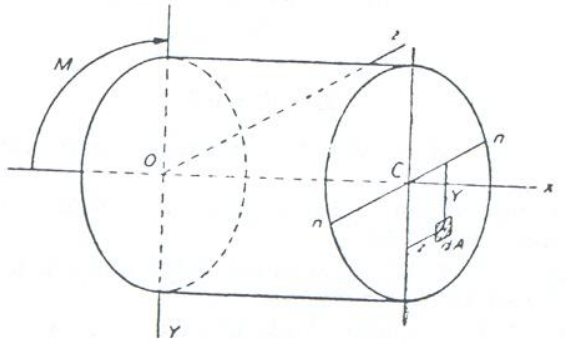
VI. SAVIJANJE GREDA U RAVNI KOJA NIJE RAVAN SIMETRIJE (KOSO SAVIJANJE)

40. ČISTO SAVIJANJE U RAVNI KOJA NIJE RAVAN SIMETRIJE



Ako greda ima ravan simetrije, recimo *xy*, i ako spregovi koji postoje u ovoj ravni deluju na krajevima, tada će greda biti savijena u istoj ravni i neutralna osa *nn* u svakom poprečnom preseku grede prolaziće kroz težište C i biće upravna na ravan dejstva spregova. Iz simetrije se može zaključiti da napon koji odgovaraju ovom pravcu neutralne ose daju rezultujući spreg u *xy* ravni, i sa tačnim izborom ovih napona $\sigma_z = \dfrac{M_y}{I_z}$ ovaj spreg će se uravnotežiti sa spoljašnjim spregom M.

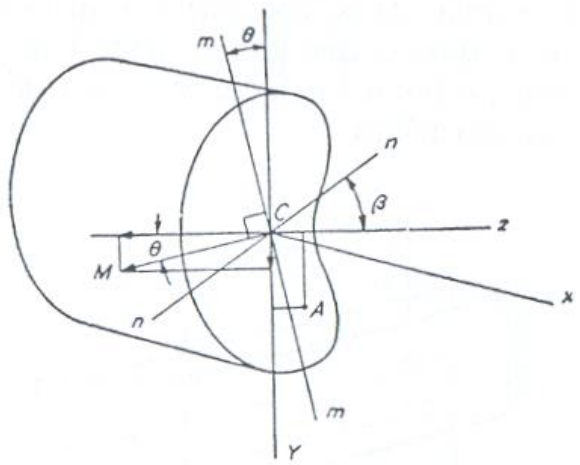
Posmatrajmo sada slučaj u kome ravan dejstva spregova *xy* nije ravan simetrije, i ispitajmo pod kojim će uslovima neutralna osa biti upravna na tu ravan.



Ako pretpostavimo da je osa *nn* upravna na ravan *xy* i ako postupimo kao u članu 19, nalazimo da je sila koja deluje na elementarnoj površini poprečnog preseka *dA* upravna na poprečni presek i ima vrednost $E \cdot y \cdot dA / r$. jednačina ravnoteže za deo grede koji jeprikazan u slici, biće

$$\frac{E}{r} \cdot \int_A \cdot y \cdot dA = 0 \quad , \quad \frac{E}{r} \int_A \cdot y^2 \cdot dA = M \quad , \quad \frac{E}{r} \int_A \cdot y \cdot z \cdot dA = 0 \qquad \text{(a)}$$

Prva od ovih jednačina tvrdi da neutralna osa prolazi kroz težište poprečnog preseka. Druga jednačina određuje vrednost krivine $\left(\dfrac{1}{r}\right)$ elastične linije, a treća jednačina tvrdi da su *y* i *z* ose glavne ose inercije poprečnog preseka i da su ravni *xy* i *xz* GLAVNE RAVNI grede. Ovo pokazuje da se u opštem slučaju čistog savijanja ravan savijanja poklapa sa ravni dejstva sprega samo ako je ova jedna od glavnih ravni grede.



Ako ravan dejstva spregova ne prolzai kroz jednu od glavnih osa poprečnog preseka grede, tada treća od jednačina ravnoteže (a) neće biti zadovoljena. na taj način, pravac neutralne ose neće biti upravan na ravan dejstva spregova i mora se naći na sledeći način: Pretpostavimo da spreg M deluje u jednoj aksijalnoj ravni štapa koja preseca poprečni presek duž prave *mm* koja je nagnuta prema glavnj osi *y* za ugao θ. Vektor M koji predstavlja moment sprega može da se rastavi u dve komponente kao što je pokazano na slici. Pošto svaka komponenta sprega

deluje u jednoj od glavnih ravni grede, odgovarajući naponi će biti dobijeni primenom uobičajenih formula za gredu i ukupni napon u tački *A* poprečnog preseka biće dat formulom

$$\sigma = \frac{M \cdot \cos\theta}{I_z} \cdot y + \frac{M \cdot \sin\theta}{I_y} \cdot z \qquad \text{(b)}$$

Kada izraz (b) izjednačimo sa nulom, dobijamo jednačinu neutralne ose

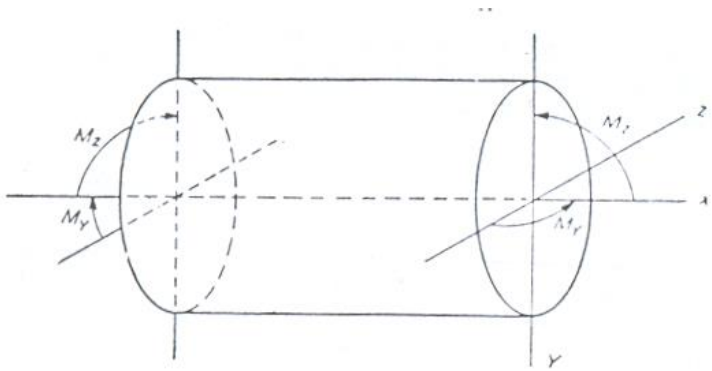
$$\frac{y \cdot \cos\theta}{I_z} + \frac{z \cdot \sin\theta}{I_y} = 0 \qquad \text{(c)}$$

a tanges ugla β, koji određuje pravac neutralne ose *nn* biće

$$tg\beta = \frac{-y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot tg\theta \qquad \text{(d)}$$

Vidi se da je ugao β u opštem slučaju različit od θ i da neutralna osa nije upravna na aksijalnu ravan *mm* u kojoj deluju savijajući spregovi. Dva ugla su jednaka samo ako je $\theta = 0$ ili ako je $I_z = I_y$. U prvom od ovih slučajeva savijajući spregovi deluju u glavnoj ravni *xy* i neutralna osa se poklapa sa glavnom osom *z*. U drugom slučaju dva glavna momenta inercije poprečnog preseka su jednaki. Elipsa inercije poprečnog preseka $ky = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = kz = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$, u ovom slučaju postaje krug i bilo koji par upravnih težištnih osa može se smatrati kao par glavnih osa, pa je na taj način neutralna osa uvek upravna na ravan savijajućih spregova.

U predhodnom izlaganju spregove smo razložili u dve komponente spregova koji deluju u glavnim ravnima grede i sračunali napone usled svake od tih komponenata. Nekad je zgodnije da se radi sa datim savijajućim spregovima i da se ima formula za normalne napone usled tih spregova. Da bismo obrazovali takvu formulu, posmatrajmo savijanje grede spregovima M_z i M_y koji deluju u dve proizvoljno izabrane upravne aksijalne ravni *xy* i *xz*. Pretpostavimo da je veličina spregova takva da se savijanje vrši u *xy* ravni, tako da je neutralna osa u svakom poprečnom preseku paralelna *z* osi. Ako sa r_y označimo odgovarajući poluprečnik krivine, normalni napon će biti $\sigma_x = {E \cdot y}/{r_y}$ i dobićemo sledeću vrednost savijajućih spregova.



$$M_z = \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA = \frac{EI_z}{r_y} \quad , \quad M_y = -\int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA = -\frac{EI_{yz}}{r_y}$$

(e)

Slično, ako su spregovi takvi da se savijanje vrši u *xy* ravni, tada je $\sigma_x = {-E \cdot z}/{r_z}$

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA = \frac{EI_y}{r_z} \quad , \quad M_z = -\int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA = -\frac{EI_{yz}}{r_z} \qquad \text{(f)}$$

U opšet slučaju, kada se savijanje vrši u obe ravni, veze između savijajućih momenata i krivine dobijene su kombinujući jednačine (e) i (f), pa imamo

$$M_y = \frac{EI_y}{r_z} - \frac{EI_{yz}}{r_y} \quad , \quad M_z = \frac{EI_z}{r_y} - \frac{EI_{yz}}{r_z} \qquad \text{(g)}$$

Ako spregovi deluju u *xy* ravni, tada je $M_y = 0$, pa dobijamo

$$\frac{EI_y}{r_z}-\frac{EI_{yz}}{r_y}=0 \ , \ \frac{1}{r_z}=\frac{1}{r_y}\cdot\frac{I_{yz}}{I_y}$$

Zamenjujući to u drugu jednačinu (g) nalazimo

$$M_z=\frac{1}{r_y}\cdot\frac{E\left(I_z\cdot I_y-I_{yz}^2\right)}{I_y} \ ,$$

$$\frac{1}{r_y}=\frac{M_z\cdot I_y}{E\left(I_z\cdot I_y-I_{yz}^2\right)} \ , \ \frac{1}{r_z}=\frac{M_z\cdot I_{yz}}{E\left(I_z\cdot I_y-I_{yz}^2\right)} \tag{114}$$

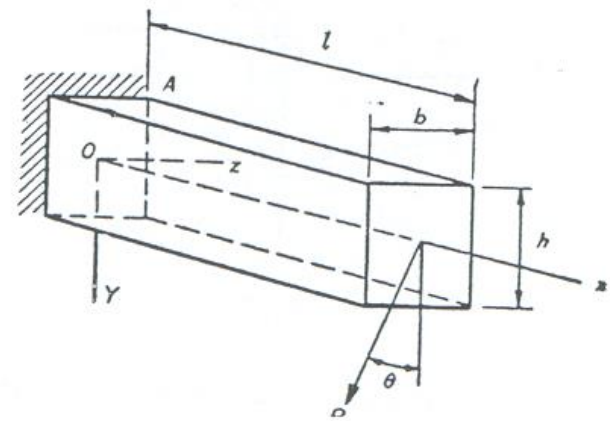
Tada će normalni napon usled sprega M_z biti

$$\sigma_x=\frac{E\cdot y}{r_y}-\frac{E\cdot z}{r_z}=\frac{M_z}{I_z\cdot I_y-I_{yz}^2}\cdot\left(I_y\cdot y-I_{yz}\cdot z\right) \tag{115}$$

Slično, ako je M_z jednako nuli, dobijamo

$$\sigma_x=\frac{M_y}{I_z\cdot I_y-I_{yz}^2}\cdot\left(I_{yz}\cdot y-I_z\cdot z\right) \tag{116}$$

41. SAVIJANJE GREDA KOJE IMAJU DVE RAVNI SIMETRIJE



Ako greda ima dve ravni simetrije problem savijanja poprečnim silama, koje su nagnute prema ovim ravnima i prolaze kroz osu grede, može odmah da se reši primenom metode superpozicije. Svaka poprečna sila može da se razloži u dve komponente koje deluju u dvema ravnima simetrije i pošto se reši problem savijanja za svaku od tih ravni, krajnji naponi i ugibi dobijeni su superpozicijom. Posmatrajmo npr. konzolu pravougaonog poprečnog preseka opterećenim poprečnom silom P na kraju pod uglom θ prema vertikalnoj ravni simetrije. Kada silu razložimo u dve komponente $P\cdot\cos\theta$ i $P\cdot\sin\theta$ i posmatrajmo savijanje u vertikalnoj i horizontalnoj ravni ravni simetrije, nalazimo da su apsolutne vrednosti odgovarajućih savijajućih momenata u uklještenju $P\cdot\ell\cdot\cos\theta$ i $P\cdot\ell\cdot\sin\theta$. Ako se uzme u obzir smerovi ovih momenta, normalni napon u bilo kojoj tački uklještenog poprečnog preseka biće

$$\sigma=-\frac{P\cdot\ell\cdot y\cdot\cos\theta}{I_z}+\frac{P\cdot\ell\cdot z\cdot\sin\theta}{I_y}$$

Maksimalni normalni napon zatezanja biće u tački A

$$\sigma_{\max}=\frac{6\cdot P\cdot\ell}{b\cdot h}\cdot\left(\frac{\cos\theta}{h}+\frac{\sin\theta}{b}\right)$$

Vertikalni i horizontalni ugib opterećenog kraja biće

$$\delta_y=\frac{P\cdot\ell^3\cdot\cos\theta}{3\cdot EI_z} \ , \ \delta_z=-\frac{P\cdot\ell^3\cdot\sin\theta}{3\cdot EI_y}$$

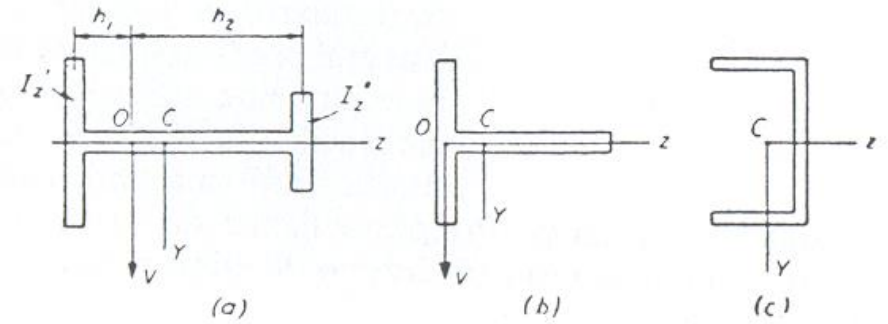
a ukupni ugib se dobija iz jednačine

$$\delta=\sqrt{\delta_y^2+\delta_z^2}$$

42. SAVIJANJE GREDA U GLAVNIM RAVNIMA KOJE NISU RAVNI SIMETRIJE -CENTAR SMICANJA-

Pri razmatranju čistog savijanja, član 40, bilo je pokazano da se ravan elastične linije poklapa sa ravni savijajućih spregova, ukoliko ovi spregovi deluju u jednoj od dve glavne ravni savijanja. U slučaju savijanja grede komplanarnim sistemom poprečnih sila, problem je komplikovaniji. Ako u glavnoj ravni, u kojoj sile deluju nije ravan simetrije, takvo savijanje je praćeno torzijom grede. Sledeće izlaganje će pokazati kako se ova torzija može odstraniti i da se ostvari prosto savijanje odgovarajućim pomeranjem ravni dejstva sila paralelno samoj sebi.

Počećemo sa prostim primerima u kojima poprečni presek grede ima jednu osu simetrije (*z* osa), a sile deluju u ravni koja je upravna na ovu osu.

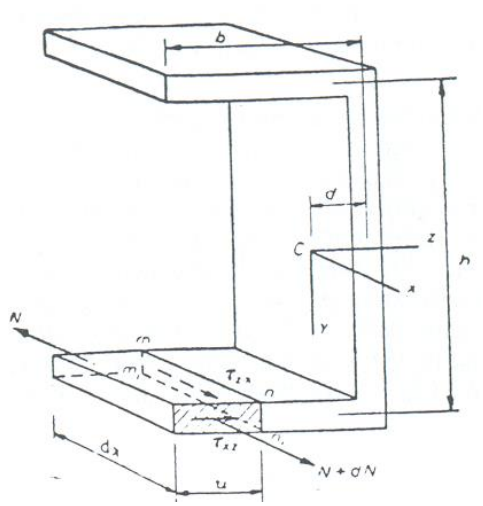


Posmatrajmo slučaj grede tankih zidova koja je prikazana na slici (a), i odredimo položaj vertikalne ravni u kojoj poprečni tereti moraju da deluju da bi proizveli prosto savijanje grede u vertikalnoj ravni. Iz prethodnog izlaganja o raspodeli vertikalnih slučajnih napona τ_{xy} možemo da zaključimo da će praktično ukupnu transverzalnu silu V preuzeti sami pojasevi. Ako posmatramo pojaseve kao dve odvojene grede, čiji poprečni preseci imaju momente inercije $I_z^{'}$ i $I_z^{''}$, tada će njihove krivine i njihovi ugibi pri savijanju biti jednaki ako su tereti raspodeljeni između njih u odnosu $I_z^{'} : I_z^{''}$ (uticaj transverzalne sile na ugib pojaseva zanemaren je u ovom izlaganju). Transverzalne sile u ovim pojasevima biće takođe u istom odnosu. Ovaj uslov će biti zadovoljen ako poprečni tereti deluju u vertikalnoj ravni prolazeći kroz tačku O, tako da je

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{I_z^{''}}{I_z^{'}} \ ,$$

gde su h_1 i h_2 rastojanja tačke O od težišta poprečnih preseka pojaseva. Na ovaj način nalazimo da je tačka O pomerena od težišta C poprečnog preseka ka pojasu čiji poprečni presek ima veći moment inercije. U graničnom slučaju, sl.(b), u kojem jedan pojas ne postoji, može se pretpostaviti sa dovoljnom tačnosti da se tačka O poklapa sa težištem pojasa i da poprečni tereti treba da deluju u vertikalnoj ravni kroz ovu tačku da bismo imali prosto savijanje. Tačka O, kroz koju mora da prođe ravan opterećenja da bismo eliminisali torziju, zove se centar smicanja.

Posmatrajmo sada I profil, sl(c), i odredimo položaj ravni u kojoj vertikalni tereti moraju delovati da bi proizveli prosto savijanje sa *z* osom kao neutralnom. Zbog toga je potrebno da posmatramo raspodelu smicajnih napona poprečnih preseka pri prostom savijanju. Da bismo izračunali vertikalni smicajni napon τ_{xy} za poprečni presek rebra, upotrebljena je ista metoda kao i u slučaju I grede (član 25), i može se pretpostaviti sa dovoljnom tačnošću da vertikalnu transverzalnu silu V prenosi samo rebro. U pojasevima će postojati horizontalni smicajni naponi koje ćemo označiti sa τ_{xz}. Da bismo našli veličinu ovih napona, posmatrajmo element isečen iz pojasa sa dva bliska poprečna preseka na udaljenju *dx*, i vertikalnom ravni mnm_1n_1 koja je paralelna rebru.



Ako je greda savijena konveksno na dole, donji pojasev će biti zategnt i zatežuće sile N i $N+dN$ koje deluju na gornji element biće jednake,

$$\frac{E}{r}\int_A y\cdot dA = N \quad , \quad \frac{1}{r}=\frac{M}{EI_z} \quad , \quad N=\frac{M}{I_z}\int_A \cdot y\cdot dA$$

i

$$N+dN=\frac{M+\dfrac{dM}{dx}\cdot dx}{I_z}\cdot\int y\cdot dA$$

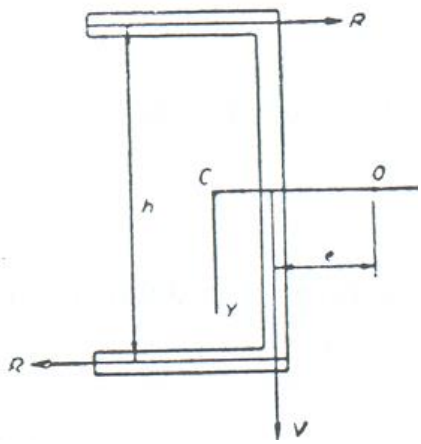
gde intergracija mora da se izvrši preko šrafiranog dela poprečnog preseka pojasa. Integral predstavlja statički moment šrafirane površine u odnosu na z osu. Razlika zatežućih sila N i $N+dN$ mora biti jednaka sumi smicajnih napona τ_{zx} koji deluju preko strane mnm_1n_1 elementa. Pretpostavljajući da su ovi naponi jednoliko raspoređeni preko ove strane i ako sa t obeležimo debljinu pojasa, dobijamo sledeću jednačinu za izračunavanje τ_{zx}

$$\tau_{zx}\cdot t\cdot dx=-dN=-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dx}{I_z}\cdot\int y\cdot dA \text{ , odakle je}$$

$$\tau_{zx}=-\frac{V}{t\cdot I_z}\cdot\int y\cdot dA \qquad \text{(a)}$$

Statički moment šrafirane površine proporcionalan je rastojanju ivice rebra; prema tome τ_{xz} je proporcionalan sa n. kao što je pokazano u članu 23, smicajni napon τ_{xz}, koji su jednaki sa τ_{zx} moraju delovati horizontalno u tačkama duž linije nn_1 u poprečnom preseku pojasa. Na taj način, naponi τ_{xz} nisu raspoređeni jednoliko preko poprečnog preseka rebra, već su proporcionalni rasstojanju n. Na mestu spoja pojasa i rebra raspodela napona je komplikovana. U našem približnom računu pretpostavićemo da jed.(a) važi od $n=0$ do $n=b$. Tada, ako sa h obeležimo rastojanje između težišta pojaseva, i znajući da statički moment poprečnog preseka gornjeg pojasa, biće očigledno jednaka i suprotnog smara sili koja se dobija iz izraza (b) $2R=-\left(\tau_{xz}\right)_{\max}\cdot b\cdot t$

$$R=\frac{V\cdot b\cdot h}{2\cdot I_z}\cdot\frac{b\cdot t}{2}=\frac{V\cdot b^2\cdot h\cdot t}{4\cdot I_z} \qquad \text{(c)}$$



Na taj način, smicajni napon po površini poprečnog preseka I profila svodi se na sile prikazane na sl.

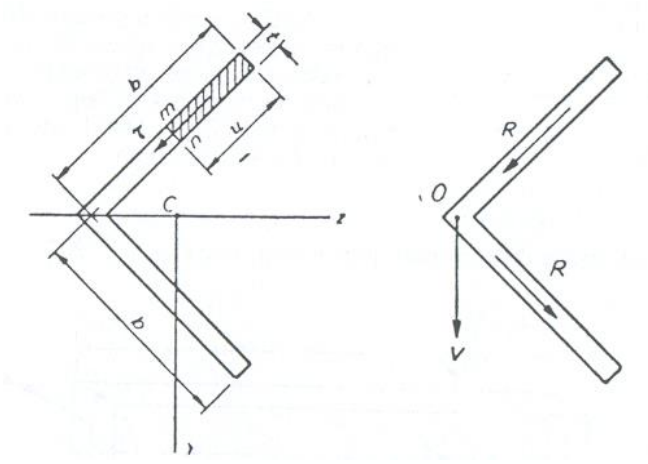
Ovaj sistem sila je statički ekvivalentan sili V koja deluje u O na rastojanju od težišta rebra:

$$R\cdot h=V\cdot e \qquad e=\frac{R\cdot h}{V}=\frac{b^2\cdot h^2\cdot t}{4\cdot I_z} \qquad \text{(d)}$$

Iz ovoga se vidi, da bismo dobili prosto savijanje pri kome z osa predstavlja neutralnu osu, vertikalnu ravan dejstva poprečnih tereta mora prolaziti kroz tačku O, koja se zove CENTAR SMICANJA. Ako ta ravan ima bilo koji drugi položaj, savijanje grede će biti praćeno uvijanjem, i naponi se više neće ponašati po jednostavnom zakonu po kome je σ_x proporcionalno sa y i nezavisno od koordinate z.

U slučaju savijanja u vertikalnoj ravni jednog ugaonika, smicajni napon τ u tačkama duž *mn* imaće pokazani smer i iznosiće

$$\tau = \frac{V}{t \cdot I_z} \int y \cdot dA$$

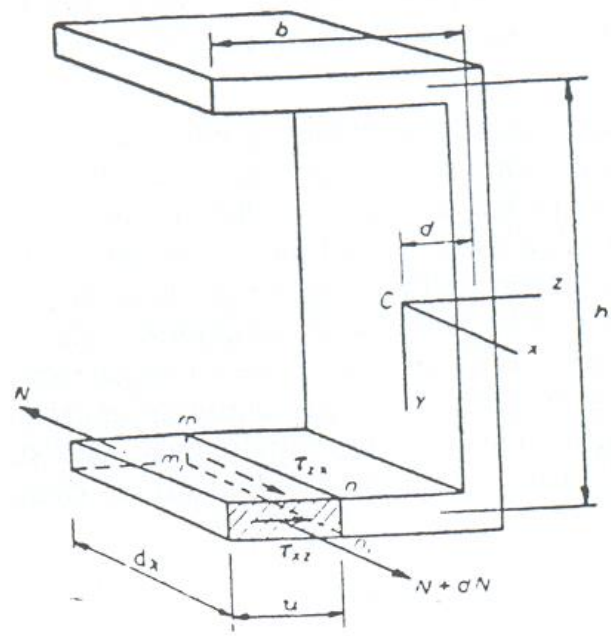


gde integral predstavlja statički moment šrafirane površine u odnosu na *z* osu. Ovi smicajni naponi daju rezultujuću silu u pravcu prikazanom nasl.(b) koja je jednaka

$$R = \frac{V \cdot b^3 \cdot t}{3 \cdot I_z \cdot \sqrt{2}}$$

Za donji pojas će biti dobijena sila iste veličine. Rezultanta ove dve sile je jednaka V i prolazi kroz presečnu tačku srednjih linija pojasa *O*, koja je u ovom slučaju centar smicanja.

U prethodnim slučajevima posmatrli smo grede sa jednom ravni simetrije koje su bile savijene upravno na tu ravan. U takvim slučajevima centar smicanja je na osi simetrije poprečnog preseka i za određivanje njegovog položaja potrebna nam je samo jedna koordinata. Posmatrajmo sada nesimetričnu gredu za koju su nam potrebne dve koordinate za određivanje centra smicanja. Kao primer uzećemo profil jednake debljine *t*, ali sa nejednakim pojasevima. Uzimajući težišne ose *yz* paralelne rebru i pojasevima, pretpostavljamo prvo da su transverzalne sile koje deluju na gredu paralelne rebru i na takvom rastojanju od rebra da ne postoji uvijanje grede. Vertikalnu silu V_y preuzeće samo rebro.



Za izračunavanje horizontalnih smicajnih sila u pojasevima postupamo kao i ranije i posmatramo sile koje deluju na element donjeg pojasa, koji je šrafiran. Da bismo sračunali podužnu silu *N* koja deluje na elemente upotrebićemo jed.(115)

$$N = \int \sigma_x \cdot dA = \frac{M_z}{I_z : I_y - I_{yz}^2} \cdot \left(I_y \cdot \int y \cdot dA - I_{yz} \cdot \int z \cdot dA \right)$$

u kojo integrali na desnoj strani predstavljaju statičke momente u odnosu na *z* i *y* ose šrafirane površine, tako da je

$$\int y \cdot dA = c \cdot t \cdot n$$

i

$$\int z \cdot dA = -t \cdot n \cdot \left(b_1 - d - \frac{n}{2} \right) = t \cdot \left(\frac{n^2}{2} + d \cdot n - b_1 \cdot n \right)$$

Tada diferenciranjem dobijamo

$$\frac{dN}{dx} \cdot dx = \frac{V_y \cdot dx}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[I_y \cdot c \cdot t \cdot n - I_{yz} \cdot t \left(\frac{n^2}{2} + d \cdot n - b_1 \cdot n \right) \right] \quad , \quad \frac{dM_z}{dx} = V_y$$

i jednačina ravnoteže za element koji posmatramo je

$$t \cdot \tau_{zx} \cdot dx = -\frac{V_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[I_y \cdot c \cdot t \cdot n - I_{yz} \cdot t \left(\frac{n^2}{2} + d \cdot n - b_1 \cdot n \right) \right]$$

Horizontalna smičuća sila na poprečnom preseku pojasa je tada

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{V_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[I_y \cdot c \cdot t \cdot n - I_{yz} \cdot t \left(\frac{n^2}{2} + d \cdot n - b_1 \cdot n \right) \right]$$

i odgovarajuća smicajna sila u pojasu je

$$t \cdot \int_0^{b_1} \tau_{xz} \cdot dn = \frac{-V_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot t \cdot \left(I_y \cdot c \cdot \frac{n^2}{2} \Big|_0^{b_1} - I_{yz} \cdot \left(\frac{n^3}{6} + d \cdot \frac{n^2}{2} - b_1 \cdot \frac{n^2}{2} \right) \right) \Big|_0^{b_1}$$

$$= -\frac{V_y \cdot b_1^2 \cdot t}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[\frac{I_y \cdot c}{2} - I_{yz} \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \qquad \text{(e)}$$

Pošto su ove sile koje deluju na gredi vertikalne, horizontalne smicajne sile u pojasevima moraju da obrazuju spreg koji se može dobiti množenjem smičuće sile na donjem pojasu sa rastojanjem *h*. Moment u odnosu na težište *C* svih smičućih napona koji deluju u poprečnom preseku je tada

$$V_y \cdot \left\{ d + \frac{b_1^2 \cdot h \cdot t}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[\frac{I_y \cdot c}{2} - I_{yz} \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \right\} ,$$

koji pokazuje da se vertikalna ravan u kojoj deluju spoljašnje sile koji mogu da prizvedu savijanje grede bez uvijanja, nalazi na odstojanju

$$Z_0 = d + \frac{b_1^2 \cdot h \cdot t}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[\frac{I_y \cdot c}{2} - I_{yz} \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \qquad \text{(f)}$$

od težišta C poprečnog preseka. U specijalnom slučaju kada su pojasevi jednaki, ose *y* i *z* su glavne ose i I_{yz} postaje nula, $c = \frac{h}{2}$ pa dobijamo

$$Z_0 = dt + \frac{b_1^2 \cdot h \cdot t}{4 \cdot I_z}$$

što se slaže sa ranije dobijenim rezultatom, izraz (d).

Rastojanje Z_0 predstavlja horizontalnu koordinatu centra smicanja *C*.

Da bismo sračunali koordinatu y_0, pretpostavljamo da spoljašnje poprečne sile deluju u ravni koja je paralelna sa *xz* ravni. Za sračunavanje normalnih napona σ_x upotrebićemo sada jed.(116)

$$t \cdot \tau_{zx} \cdot dx = \frac{-V_z}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[I_{yz} \cdot c \cdot t \cdot n - I_z \cdot t \left(\frac{n^2}{2} + d \cdot n - b_1 \cdot n \right) \right]$$

Horizontalna smičuća sila u donjem pojasu iznosi

$$t \cdot \int_0^{b_1} \tau_{xz} \cdot dn = -\frac{V_z \cdot b_1^2 \cdot t}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[\frac{I_{yz} \cdot c}{2} - I_z \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right]$$

Kada uzmemo moment ove sile u odnosu na tačku B i kada ga podelimo horizontalnom smičućom silom V_z, uzazvan od spoljašnjih sila, dobićemo rastojanje f, ravni dejstva sila od tačke B. $\left(M_B = V_z \cdot f\right)$

$$y_0 = f + c \cdot h = c - h + \frac{b_1^2 \cdot h \cdot t}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} \cdot \left[\frac{I_{yz} \cdot c}{2} - I_z \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \qquad \text{(g)}$$

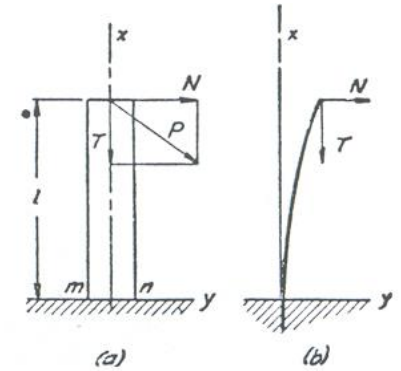
Za specijalan slučaj jednakih pojaseva imamo da je $I_{yz} = 0$, $c = \frac{h}{2}$ pa kada jed.(g) izrazimo pomoću d i I_y , može se pokazati da ona postaje nula i da centar smicanja leži na z osi.

Koordinate y_0 i z_0 date jed.(f) i (g) potpuno određuju položaj centra smicanja za I profil.

VII. SLOŽENO NAPREZANJE; SAVIJANJE SA AKSIJALNIM NAPREZANJEM; IZVIJANJE STUBOVA

43. SAVIJANJE PRAĆENO AKSIJALNIM NAPREZANJEM

U daljem izlaganju pretpostavljamo da sile, koje napadaju prizmatičan štap, leže u njegovoj ravni simetrije. Ali, dok smo do sada posmatrali samo poprečne sile, ovde pretpostavljamo da sile mogu imati komponentu i u pravcu ose štapa. Na slici je prikazan jednostavan slučaj naprezanja ove vrste, gde je stub opterećen kosom silom *P*. Razložimo tu silu u poprečnu komponentu N_1 uzdužnu *T* i pretpostavimo da je stub toliko krut da se njegov ugib može zanemariti pri posmatranju napona izazvanih silom *T*. Tada se celokupan napon usled pritiska silom *T* i napona usled savijanja silom *N* u nekoj tački dobija superpozicijom napona. Slučaj vitkih stubova kod kojih i aksijalna sila može znatno uticati na savijanje (sl.b) biće pručena kasnije. Napon izazvan silom *T* u svim presecima stuba je isti i jednak *T/A* , gde je *A* površina preseka.



Napon usled savijanja zavisi od napadnog momenta koji raste od nule na gornjem kraju do svoje najveće vrednosti $N \cdot \ell$ na donjem. Kritičan presek je, dakle, na uklještenom kraju, a napon u tački tog preseka udaljenoj za *y* od *z* ose je

$$\sigma_x = -\frac{N \cdot \ell \cdot y}{I_z} - \frac{T}{A} \qquad \text{(a)}$$

Zamislimo da je poprečni presek stuba pravougaonik $b \cdot h$ sa stranom *h* paralelnom ravni savijanja, biće $A = b \cdot h$, $I_z = b \cdot h^3 / 12$, pa je najveći napon pritiska

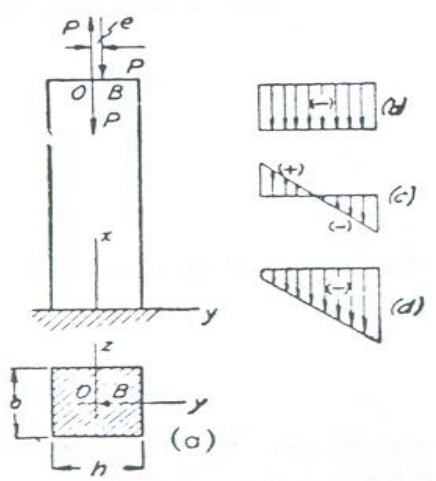
$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{6 \cdot N \cdot \ell}{b \cdot h^2} - \frac{T}{b \cdot h} \qquad \text{(b)}$$

Ovaj napon je brojno najveći.
Za tačku *m* nalazimo

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6 \cdot N \cdot \ell}{b \cdot h^2} - \frac{T}{b \cdot h}$$

Ako sila *P* nije paralelna jednoj od glavnih ravni savijanja, možemo naći napone usled savijanja njenom poprečnom komponentom *N* , kad razložimo *N* u dve komponente paralelne tim ravnima. Ukupni napon u nekoj tački dobija se superpozicijom tog napona usled pritiska aksijalnom silom.

44. EKSCENTRIČNI PRITISAK KRATKIH STUBOVA



Ekscentrični pritisak je specijalan slučaj savijanja praćen aksijalnim naprezenjem. Ako dužina štapa nije prevelika u poređenju sa njegovim poprečnim dimenzijama, njegov je ugib toliko mali da se može zanemariti u poređenju sa poprečnim ekscenticitetom *e* ; prema tome može se primetiti metoda superpozicije. Posmatrajmo, na primer, slučaj pritiska silom *P* sa ekscentricitetom *e* na jednoj od glavnih osa osnove. Ako dodamo u težište *O* dve jednake sile *P* suprotnog smera, to neće promeniti uslove zadatka, jer je dodatni sistem sila ekvivalentan mali. Na taj način dobijamo aksijalni pritisak silom *P*, koji izaziva napon pritiska $-P/A$, prikazan na

sl.b, i savijanje u jednoj od glavnih ravni spregom $P \cdot e$, koji izaziva napon $-\left(P \cdot e \cdot y / I_z\right)$, prikazan na sl.c. Ukupan napon je onda

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{P \cdot e \cdot y}{I_z} \qquad \text{(a)}$$

Dijagram raspodele ukupnog napona dat je na sl.(d). Pretpostavljamo da je najveći napon usled savijanja manji od napona usled aksijalnog pritiska, te će u svim tačkama preseka biti napon pritiska. Ako je najveći napon usled savijanja veći od onog usled aksijalnog pritiska, postojaće prava paralelna *z* osi u čijim tačkama je napon nula, tj. neutralna osa koja deli presek u dva područja. Za pravougaoni presek strana *h* i *b* iz jed.(a) dobijamo

$$\sigma_x = -\frac{P}{b \cdot h} - \frac{12 \cdot P \cdot e \cdot y}{b \cdot h^3} \qquad \text{(a')}$$

Za $y = -h/2$ dobijamo

$$\left(\sigma_x\right)_{\max} = -\frac{P}{b \cdot h} + \frac{6 \cdot P \cdot e}{b \cdot h^2} = \frac{P}{b \cdot h} \cdot \left(-1 + \frac{6 \cdot e}{h}\right) \qquad \text{(b)}$$

a za $y = h/2$

$$\left(\sigma_x\right)_{\min} = -\frac{P}{b \cdot h} - \frac{6 \cdot P \cdot e}{b \cdot h^2} = -\frac{P}{b \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e}{h}\right) \qquad \text{(c)}$$

Kao što se vidi, dok je $e < h/6$, nema promena znaka napona u preseku; ako je $e = h/6$, najveći napon pritiska prema jed.(c) je $2 \cdot P / b \cdot h$, a napon na suprotnoj strani pravougaonog preseka je nula; ako je $e > h/6$, javlja se promena znaka napona i položaj neutralne ose dobija se kad izjednačimo sa nulom opšti izraz (a') za σ_x

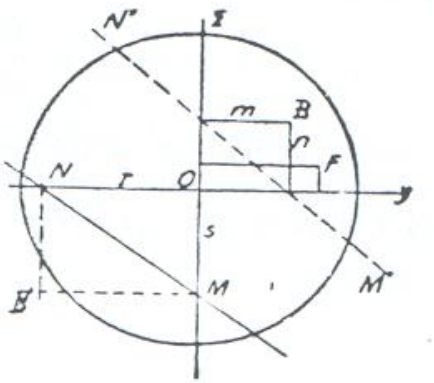
$$y = -\frac{h^2}{12 \cdot e} \qquad \text{(d)}$$

Uvedemo li oznako k_z za poluprečnik inercije u pogledu *z* ose, biće

$$k_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12} \quad , \quad y = -\frac{k_z^2}{e} \qquad (117)$$

Vidi se da se odstojanje neutralne ose od središta *O* smanjuje kada ekscentricitet *e* raste. Isto izlaganje može se primeniti i na slučaj ekscentričnog zatezanja.

Jed.(117) možemo koristiti i za druge oblike preseka, ako se napadna tačka tereta nalazi na jednoj od glavnih osa inercija osnove.



Posmatrajmo sad slučaj kada napadna tačka *B* ekscentrične sile pritiska *P* nije na jednoj od glavnih osa inercije preseka, koje su na slici uzete za *y* i *z* ose. Obeležimo li sa *m* i *n* koordinate te tačke, napadni momenti usled sile *P* u pogledu *y* i *z* osa biće $P \cdot n$ odnosno $P \cdot m$. Superpozicijom napona u tački *F* preseka nalazimo

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{P \cdot m \cdot y}{I_z} - \frac{P \cdot n \cdot z}{I_y} \qquad \text{(e)}$$

gde prvi član desne strane predstavlja napon usled aksijalnog pritiska, a dva ostala napona usled savijanja momentima $P \cdot n$ odnosno $P \cdot m$. Kao što se vidi, raspodela napona je linearna. Jednačinu neutralne ose nalazimo kad izjednačimo desnu stranu jed.(e) sa nulom. Ako uvedemo

oznake $I_z/A = k_z^2$ i $I_y/A = k^2 \cdot y$, gde su k_z odnosno k_y poluprečnici inercije u pogledu *z*, odnosno *y* ose, biće

$$\frac{m \cdot y}{k_z^2} + \frac{n \cdot z}{k_y^2} + 1 = 0 \qquad \text{(f)}$$

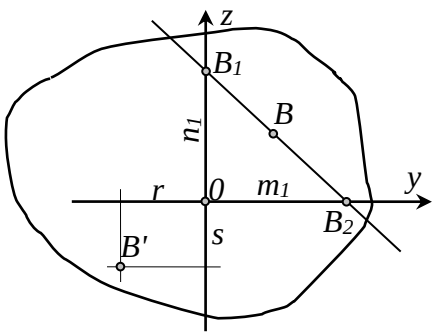
a kad uvrstimo u tu jednačinu prvo *y=0*, a zatim *z=0*, dobićemo položaj tačke *M* i *N* , u kojima neutralna osa seče koordinate ose *z* i *y*.
Koordinate *s* i *r* tih tačaka su

$$\frac{n \cdot s}{k_z^2} = -1 \quad , \quad \boxed{s = -\frac{k_y^2}{n}} \quad , \quad \frac{m \cdot r}{k_z^2} = -1 \quad , \quad \boxed{r = -\frac{k_z^2}{m}} \qquad \text{(g)}$$

Iz ovih jednačina nalazimo

$$n = -\frac{k_y^2}{s} \quad , \quad m = -\frac{k_z^2}{r}$$

Ove jednačine imaju isti oblik kao i jed.(g); može se, dakle, zaključiti da kad sila napada tačku *B'* sa koordinatama *s* i *r* , njoj odgovara neutralna osa *N'M'*. Ona je prikazana na slici isprekidanom linijom sa odsečenim *m* odnosno *n* na *y* i *z* osi.



Postoji još jedna važna zavisnost između položaja napadne tačke *B* sile i položaja neutralne ose. Naime, kada se *B* kreće duž prave B_1 B_2 na slici, neutralna osa se kreće oko nepomične tačke *B*'. To se može dokazati na sledeći način. Razložimo silu u tački *B* u dve paralelne komponente sa napadnim tačkama u B_1 i B_2. Komponenta u *B*1 leži u glavnoj ravni *xz*, dakle njoj odgovara neutralna osa paralelna *y* osi.

Otsečak koji ta pravi na *z* osi možemo naći iz jednačine slične jedn. (117) kao

$$s = -\frac{k_y^2}{n_1} \qquad \text{(h)}$$

Na sličan način neutralne osa za komponentu u tački B_2 je paralelna *z* osi, a nalazi se na odstojanju

$$s = -\frac{k_z^2}{m_1} \qquad \text{(i)}$$

od nje. Za svaki položaj tereta na pravoj B_1 B_2, napon u tački B' biće nula. Prema tome, kada se napadna tačka sile kreće na pravoj B_1 B_2, neutralna osa te okreće oko tačke B', čije su koordinate date jedn. (h) i (i).

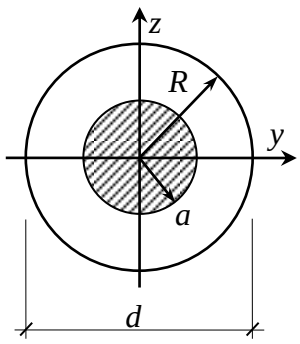
45. JEZGRO PRESEKA

U gornjem članu je bilo pokazano da pri malom ekscentricitetu *e* normalni napon ima isti znak u svim tačkama preseka ekscentrično opterećenog štapa. Kod većih vrednosti *e* neutralna osa seče konturu preseka, te se javlja promena znaka napona. Za materijal sa malom otpornošću prema zatezanju, kao što je zid od opeka, javlja se potreba da se odredi područje u kojem se mora nalaziti napadna tačka sile pritiska, da ne bi izazvala napone zatezanja u preseku. Ovo područje zove se JEZGRO PRESEKA. Metodu za određivanje jezgra pokazaćemo na sledećim jednostavnim primerima.

U slučaju kružnog preseka poluprečnika R možemo zaključiti iz simetrije da je jezgro ograničeno krugom. Poluprečnik *a* tog kruga nalazimo iz uslova da, kada sila napada tačku na rubu jezgra, neutralna osa mora biti tangenta na konturu preseka. Kako je moment inercije površine kruga u pogledu prečnika jednak $\pi R^4/4$ to je poluprečnik inercije

$$I_y = I_z = \frac{d^4\pi}{64} = \frac{R^4\pi}{4}$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{R^4\pi}{4}}{R^2\pi}} = \frac{R}{2}$$



Zamenom u jednačinu (117) *e* sa *a* i – *y* sa *R* dobijamo da je

$$R = \frac{k^2}{a} \qquad a = \frac{k^2}{R} = \frac{\frac{R^2}{4}}{R} = \frac{R}{4} \qquad \boxed{a = \frac{R}{4}}$$

tj. poluprečnik jezgra je ¼ poluprečnika R.

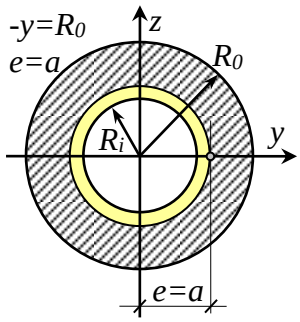
Ako je presek kružni prsten sa spoljnim poluprečnikom R_0 i unutrašnjim poluprečnikom R_i

$$I = \frac{\pi}{4}\left(R_0^4 - R_i^4\right)$$

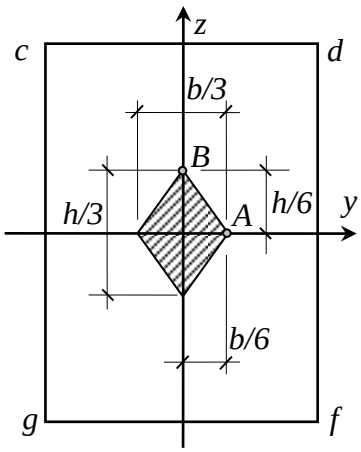
$$k^2 = \frac{\frac{\pi}{4}\left(R_0^4 - R_i^4\right)}{\pi\left(R_0^2 - R_i^2\right)} = \frac{\left(R_0^2 - R_i^2\right)\left(R_0^2 + R_i^2\right)}{4\left(R_0^2 - R_i^2\right)}$$

$$k^2 = \frac{R_0^2 + R_i^2}{4}$$

$$R_0 = \frac{k^2}{a} \qquad \boxed{a = \frac{k^2}{R_0} = \frac{R_0^2 + R_i^2}{4R_0^2}}$$



U slučaju pravougaonog preseka neutralna osa se poklapa sa stranom *cg*, kada teret napada tačku *A* u odstojanju b/6 od težišta.



Na isti način neutralna osa se poklapa sa stranom *gf*, kada teret napada tačku *B* u odstojanju h/6 od težišta. Kada se teret kreće duž prave *AB*, neutralna osa se okreće oko tačke *g*, i ne seče presek. Prema tome AB je jedna od strana konture jezgra. Ostale strane su određene simetrijom. Jezgro je, dakle, romb sa dijagonalama *h*/3 i *b*/3. Dok se napadna tačka sile nalazi u granicama tog romba, neutralna linija ne seče konturu preseka, te nema promene znaka napona.

SADRŽAJ:

I. AKSIJALNO NAPREZANJE U GRANICAMA ELASTIČNOSTI 2
1. Elastičnost 2
2. Hooke-ov zakon 2
3. Dijagram ispitivanja na zatezanje 3
4. Dopušteni napon 3
5. Naprezanje štapa sopstvenom težinom 4
6. Statički neodređeni zadaci za aksijelno naprezanje 5
7. Početna i termička naprezanja 6
8. Zatezanje kružnog prstena 7

II. ANALIZA NAPONA I DEFORMACIJA 8
9. Zavisnost napona od položaja preseka za slučaj aksijalnog naprezanja 8
10. Krug napona 9
11. Naprezanje u dva pravca 10
12. Krug napona za složeno naprezanje 12
13. Glavni napon 13
14. Analiza deformacije u slučaju aksijalnog naprezanja 15
15. Deformacija pri naprezanju u dva međusobno upravna pravca 15
16. Čisto smicanje. Modul smicanja 16
17. Dopušteni napon smicanja 18
18. Naprezanje u tri pravca 19

III. NAPONI U GREDI IZLOŽENOJ SAVIJANJU 22
19. Čisto savijanje 22
20. Moment inercije ravnih površina 24
21. Različiti oblici poprečnih preseka greda 30
22. Opšti slučaj savijanja simetričnih greda poprečnim opterećenjem 32
23. Naponi smicanja pri savijanju 33
24. Raspored napona smicanja za slučaj grede kružnog preseka 36
25. Raspored napona smicanja u gredama i profila 38
26. Glavni naponi pri savijanju 39

IV. UGIB SAVIJENE GREDE 42
27. Diferencijalna jednačina elastične linije 42
28. Savijanje grede jednoliko podeljenim teretom 43
29. Elastična linija proste grede savijene koncentrisanim teretom 45
30. Određivanje ugiba pomoću momentne površine-metoda momentne površine, Mohr-va analogija 47
31. Određivanje ugiba konzole pomoću momentne površine 49
32. Određivanje ugiba proste grede pomoću momentne površine 50
33. Metoda superpozicije 51
34. Ugib greda sa prepustima 51
35. Uticaj transverzalne sile na ugib grede 52

V. GREDE PROMENJIVOG PRESEKA. GREDE OD DVA RAZLIČITA MATERIJALA .54
36. Grede promenjivog preseka 54
37. Simetrične grede od dva različita materijala 56
38. Grede od armiranog betona 56
39. Naponi smicanja u armiranobetonskim gredama 58

VI. SAVIJANJE GREDA U RAVNI KOJA NIJE RAVAN SIMETRIJE (KOSO SAVIJANJE).....59
40. Čisto savijanje u ravni koja nije ravan simetrije 59
41. Savijanje greda koje imaju dve ravni simetrije 61
42. Savijanje greda u glavnim ravnima koje nisu ravni simetrije 62

VII. SLOŽENO NAPREZANJE; SAVIJANJE SA AKSIJALNIM NAPREZANJEM; IZVIJANJE STUBOVA 67
43. Savijanje praćeno aksijalnim naprezanjem 67
44. Ekscentrični pritisak kratkih stubova 67
45. Jezgro preseka 69