UNIVERZITET U BANJOJ LUCI

ARHITEKTONSKO-GRAĐEVINSKI FAKULTET

Dr Valentina Golubović - Bugarski

TEHNIČKA MEHANIKA 2

(Skripta – izvodi predavanja)

Banja Luka, septembar 2010.

PREDGOVOR

Ova skripta priređena su prema važećem nastavnom programu predmeta Mehanika 2, koji se izvodi u III semestru I ciklusa studija na svim odsjecima Mašinskog fakulteta u Banjoj Luci.

Nastavno gradivo predmeta Mehanika 2 obuhvata dvije oblasti mehanike, i to Kinematiku i Dinamiku. Obim gradiva prilagođen je fondu časova predavanja i vježbi (4+3). U skriptama je gradivo izloženo prirodnim redosljedom po kome je prvo obrađena kinematika tačke, kinemtaika krutog tijela, potom dinamika materijalne tačke i dinamika materijalnog sistema i krutog tijela. Ipak, moguće je odstupiti od datog redosljeda gradiva i bez ikakvih teškoća prvo obraditi kinematiku i dinamiku materijalne tačke kao jednu cjelinu, a potom kinematiku i dinamiku materijalnog sistema i krutog tijela.

Ovaj sažeti tekst svakako će pomoći studentima u pripremanju ispita iz ovog fundamentalnog predmeta tehničke struke. Studenti se upućuju da šira i dublja saznanja iz područja Tehničke mehanike, koja se obrađuju u ovom nastavnom predmetu, steknu iz odgovarajuće nastavne literature, udžbenika i zbirki zadataka, dostupnih u bibliotekama i na internetu.

Banja Luka, septembar 2010. godine

Autor

UVOD U MEHANIKU

MEHANIKA je nauka o opštim zakonima mehaničkih kretanja i ravnoteže materijalnih tijela.

Zadatak mehanike, najopštije rečeno, sastoji se u proučavanju kretanja matrijalnih tijela, tj. proučavanju promjene položaja tijela i njegovih dijelova u prostoru tokom vremena. U toku kretanja različita tijela mogu da vrše, jedna na druge, mehanički uticaj, npr. podstičući njihova kretanja ili im se suprotstavljajući. Takav međusobni uticaj jednog tijela na kretanje drugog tijela naziva se sila.

Ravnoteža tijela predstavlja poseban slučaj mehaničkog kretanja, pa je zadatak mehanike, takođe, proučavanje ravnoteže materijalnih tijela.

Podjela mehanike:

- Teorija kretanja i ravnoteže apsolutno krutih tijela (mehanika krutog tijela)
- Teorija kretanja i ravnoteže deformabilnih tijela (teorija elastičnosti i plastičnosti)
- Teorija kretanja i ravnoteže tečnih i gasovitih tijela (hidromehanika i aerodinamika, mehanika fluida)

Mehanika krutog tijela može se podijeliti na statiku, kinematiku i dinamiku.

Statika proučava ravnotežu materijalnih krutih tijela.

Kinematika se bavi proučavanjem kretanja materijalnih tijela, sa geometrijskog stajališta, ne uzimajući u obzir sile koje to kretanje izazivaju.

Dimanika pručava kretanje materijalnih tijela pri djelovanju sila, tj. dovodi u vezu kretanje materijalnih tijela sa mehaničkim uticajima (silama) koji djeluju na tijela.

Bazu mehanike krutog tijela čine Njutnovi zakoni:

- Prvi zakon: Svaka materijalna tačka ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja, sve dok djelovanjem sile ne bude prinuđena da to stanje promjeni.
- Drugi zakon: Promjena količine kretanja materijalne tačke proporcionalna je sili koja djeluje na nju i vrši se u pravcu i smjeru djelovanja sile.
- Treći zakon (zakon akcije i reakcije): uzajamni mehanički uticaji dvaju tijela ispoljavaju se silama jednakog intenziteta i pravca, a suprotnih smjerova.

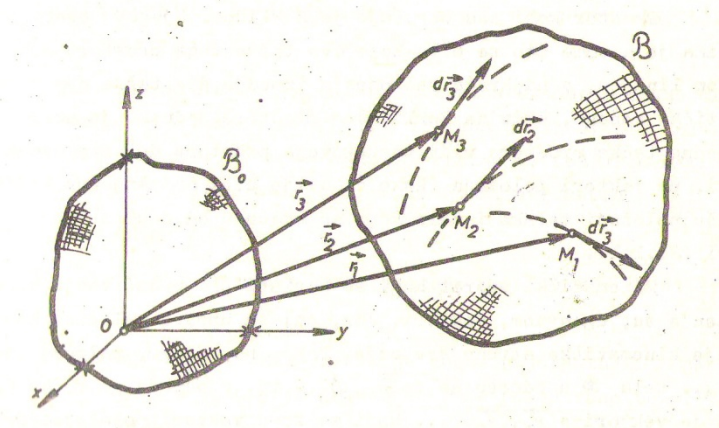
Predmet Mehanika 2 podijeljen je na dva dijela: kinamtiku i dinamiku. Kinematika je podijeljena na kinematiku tačke i kinematiku krutog dijela, dok je dinamika podijeljena na dinamiku materijalne tačke, dinamiku materijalnog sistema i dinamiku krutog tijela.

KINEMATIKA

UVOD U KINEMATIKU

Kinematika je dio teorijske mehanike u kome se proučavaju mehanička kretanja tijela ne uzimajući u obzir njihovu masu i sile koje dejstvuju na njih. U kinematici se proučavaju geometrijska svojstva kretanja tijela, te se kinamtika naziva još i geometrijom kretanja.

Pod mehaničkim kretanjem podrazumijeva se promjena položaja koje tokom vremena jedno materijalno tijelo vrši u odnosu na drugo materijalno tijelo. Mehaničko kretanje tijela je moguće proučiti samo ako postoji drugo tijelo (posmatrač) u odnosu na koje vršimo upoređivanje, tzv. referentno tijelo. Pri proučavanju kretanja u kinematičkom smislu, referentno tijelo se uvijek može smatrati nepokretnim. Kada analitički opisujemo položaj tijela , referentno tijelo (posmatrača) predstavljamo tačkom O, a prostor u odnosu na koji se tijelo kreće prikazujemo prostornim koordinatnim sistemom (referentnim sistemom), npr. Dekartovim koordinatnim sistemom sa početkom u tački O.



Kretanje tačke ili tijela u odnosu na apsolutno nepokretni sistem referencije naziva se apsolutno kretanje. Kretanje tačke ili tijela u odnosu drugo pokretno tijelo naziva se relativno kretanje.

Kretanje tijela se vrši tokom vremena u prostoru, te stoga kinematika uvodi u analizu dvije veličine: dužinu (L) i vrijeme (t), a njihove osnovne jedinice su metar i sekunda.

Vrijeme u klasičnoj mehanici je pozitivna skalarna veličina koja se neprekidno mijenja i uzima se za nezavisno promjenljivu veličinu, koju obilježavamo sa *t*. Sve ostale veličine u kinematici se posmatraju kao funkcije vremena. Prilikom mjerenja vremena uvodimo pojam početnog trenutka vremena, određenog trenutka vremena i intervala vremena.

Početni ternutak vremena naziva se trenutak od kada počinjemo da mjerimo vrijeme, tj. od kada počinjemo da posmatramo kretanje. Obično se usvaja da je početni trenutak vremena ($t_0=0$). Vrijeme neprestano teče i argument (*t*), u funkciji koga definišemo sve kinematičke veličine, je pozitivna rastuća veličina.

Određeni trenutak vremena (*t*) definiše se brojem sekundi koji su protekli od početnog trenutka vremena.

Interval vremena $\Delta t = t_2 - t_1$ naziva se vrijeme koje protekne između dvije određene pojave, tj. razlika između bilo koja dva trenutka vremena.

U kinematici se proučava kretanje krutih tijela, tj. tijela koja ne mijenjaju svoj oblik (nepromjenljiv razmak između bilo koje dvije tačke tijela). Kretanje nekog tijela poznajemo ako poznajemo položaj svake tačke tog tijela u toku vremena kretanja. Zbog toga je potrebno prvo proučiti kretanje tačke, a zatim tijela. Stoga se i kinemtika može podijeliti na:

1. Kinematku tačke
2. Kinematku krutog tijela

Tačka u kinematičkom smislu je geometrijska tačka koja mijenja položaj u prostoru u toku vremena. Tačka može biti uočena tačka nekog tijela, npr. M_1,M_2, ... ili to može biti tijelo zanemarljivo malih dimenzija.

KINEMATIKA TAČKE

OSNOVNI ZADATAK KINEMATIKE TAČKE

U kinematici tačke rješavaju se dva osnovna problema:

- Ustanovljavanje analitičkih postupaka za definisanje kretanja tačke u odnosu na utvrđeni sistem referencije;
- Određivanje, na osnovu zadatog zakona kretanja, svih kinematičkih karakteristika kretanja tačke u koje spadaju: trajektorija tačke, brzina i ubrzanje tačke.

Zavisnost između proizvoljnog položaja tačke u prostoru i vremena određuje zakon kretanja tačke, pa je osnovni zadatak konematike tačke proučavanje zakona kretanje tačke.

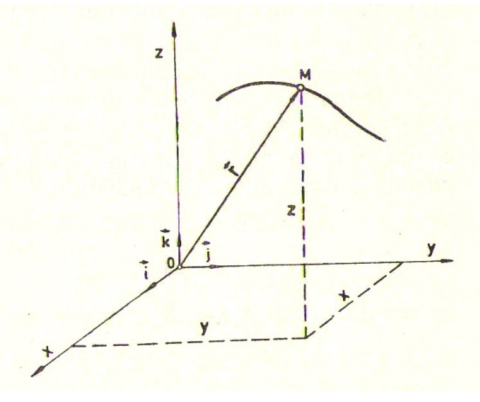
Putanja ili trajektorija tačke je zamišljena neprekidna linija koju opisuje pokretna tačka M u prostoru. Dio putanje između dva uzastopna položaja tačke M naziva se pređeni put. Jednačinu putanje tačke moguće je odrediti eliminisanjem vremena (parametra t) iz zakona kretanja tačke.

Zavisno od oblika putanje tačke, razlikuje se pravolinijsko i krivolinijsko kretanje tačke.

Proučavanje kretanja tačke vrši se u odnosu na uslovno apsoplutno nepokretni sistem referencije. Za definisanje proizvoljnog krivolinijskog kretanja tačke u prostoru najčešće se primjenjuju sljedeće tri postupka:

1. Vektorski
2. Analitički (koordinatni)
3. Prirodni

VEKTORSKI POSTUPAK ODREĐIVANJA PROIZVOLJNOG KRIVOLINIJSKOG KRETANJA TAČKE



Položaj tačke M koja se kreće potpuno je određen vektrom položaja $\vec{r}$, čiji je početak u nekoj nepokretnoj tački O, a kraj u pokretnoj tački M. Pošto tačka M mijenja položaj u odnosu na tačku O tokom vremena, mijenja se i vektor položaja $\vec{r}$ po intenzitetu, pravcu i smjeru. Prema tome, vektor položaja $\vec{r}$ predstavlja vektorsku funkciju vremena t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

koja se zove zakon kretanja tačke u vektorskom obliku ili konačna jednačina krivolinijskog kretanja tačke u vektroskom obliku. Vektor položaja $\vec{r}$ mora biti neprekidna funkcija vremena, jednoznačna i dva puta diferencijabilna.

Putanja tačke dobije se konstrukcijom geometrijskih mjesta krajeva vektora položaja $\vec{r}$ i naziva se hodograf vektora položaja $\vec{r}$.

ANALITIČKI (KOORDINATNI) POSTUPAK ODREĐIVANJA KRETANJA TAČKE

a) Dekartov pravougli koordinatni sistem

Vektor položaja $\vec{r}$ tačke M može se predstaviti u obliku

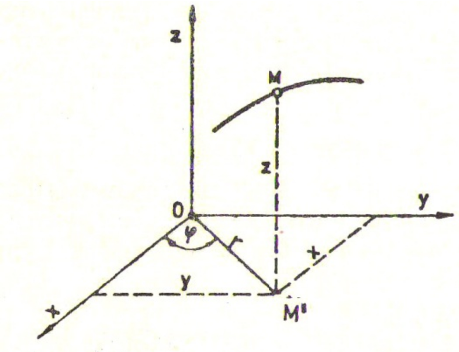
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

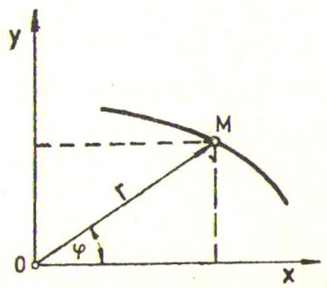
gdje su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori osa x, y i z. Vektorskoj funkciji $\vec{r}$ odgovaraju tri skalarne funkcije

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

koje se zovu zakon kretanja ili konačne jednačine krivolinijskog kretanja tačke u Dekartovim koordinatama. Eliminacijom parametra t iz jednačina kretanja dobija se jednačina linije putanje tačke.

b) Polarno cilindrični koordinatni sistem. Polarne koordinate.





Položaj tačke M određen je pomoću koordinata

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t)$$

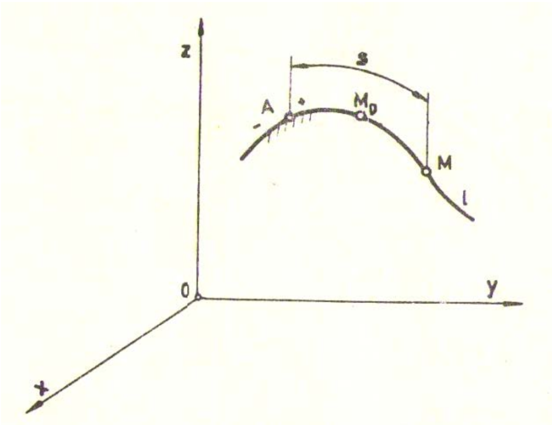
koje se zovu zakon kretanja ili konačne jednačine krivolinijskog kretanja tačke u polarno cilindričnim koordinatama. Rastojanje $\overline{OM'} = r$ je polarno rastojanje i naziva se poteg, a φ je polarni ugao.

Ako se tačka M kreće u ravni xOy, onda je položaj tačke određen koordinatama

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

koje se nazivaju zakon kretanja ili konačne jednačine krivolinijskog kretanja tačke u polarnim koordinatatama, i dobiju se za z=0.

PRIRODNI POSTUPAK ODREĐIVANJA KRETANJA TAČKE



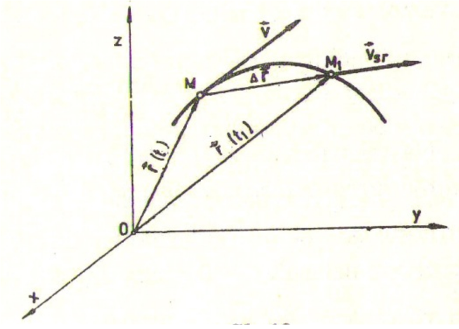
Ako je poznata putanja (linija putanje tačke-hodograf vektora položaja tačke), onda je položaj tačke M potpuno određen lučnom (krivolinijskom) koordinatom s. Na putanji se uoči nepokretna tačka A, koja se uzme za referentnu tačku, i jedan smjer se usvoji kao pozitivan a drugi kao negativan. Orijentisani luk s tada jednoznačno određuje položaj tačke M na putanji. Ako se tačka kreće duž krive, onda se koordinata s mijenja tokom vremena, tj.

$$s = s(t).$$

Ova jednačina naziva se konačna jednačina kretanja tačke po putanji ili zakon kretanja tačke po putanji.

BRZINA TAČKE

Vektor brzine tačke karakteriše promjenu vektora položaja u svakom trenutku vremena.



Pojam brzine tačke biće objašnjen sljedećim razmatranjem. Posmatrajmo dva položaja tačke na putanji, M i M_1, koji odgovaraju vremenskim trenucima t i $t_1 = t + \Delta t$. Veličina Δt je konačni vremenski interval u kome tačka pređe iz položaja M u položaj M_1, a vektor položaja se promjeni za $\Delta \vec{r}$. Ova veličina naziva se vektorski priraštaj vektora položaja $\vec{r}$ pokretne tačke.

Vektor srednje brzine tačke je definisan količnikom:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{t_1 - t}$$

Vektor srednje brzine ima isti pravac i smjer kao vektor $\Delta \vec{r}$, tj. usmjeren je u smjeru kretanja tačke.

Srednja brzina tačke u nekom intervalu vremena karakteriše promejnu vektora položaja posmatranu za interval kao cjelinu, tako da na osnovu srednje brzine ne možemo ništa zaključiti o načinu promjene položaja tačke unutar intervala Δt. Ukoliko je interval Δt manji , utoliko srednja brzina precizinije pokazuje promjenu položaja tačke u toku vremena.

Vektor brzine tačke $\vec{v}$ u datom trenutku vremena *t* je veličina kojoj teži vektor srednje brzine tačke kada interval vremena teži Δt nuli, tj. jednak je prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Daćemo fizičko tumačenje ovoj definiciji brzine: Pošto je vektor $\vec{v}_{sr}$ usmjeren duž vektora pomjeranja $\Delta \vec{r}$, to kada interval $\Delta t \to 0$ onda i $\Delta \vec{r} \to 0$, tj. tačka M_1 postaje beskonačno bliska tački M, odnosno u graničnom slučaju poklapa se sa tačkom M. Pravac vektora $\Delta \vec{r}$ teži pravcu luka $ds\vec{T} = d\vec{r}$ u tački M, tj. teži pravcu tangente $\vec{T}$ na putanju u tački M.

Iz ovog slijedi: Vektor brzine $\vec{v}$ tačke u datom trenutku vremena ima pravac tangente na trajektoriju u odgovrajućoj tački , a usmjeren je u smjeru kretanja tačke.

Vektor brzine tačke pri proizvoljnom kretanju karakteriše tokom vremena promjenu vektora položaja tačke po intenzitetu, pravcu i smjeru.

Intenzitet vektora brzine $\vec{v}$ jednak je intenzitetu prvog izvoda vektora položaja po vremenu

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$$

a nije jednak

$$|\vec{v}| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt} \quad .$$

(Pri kretanju tačke po kružnoj putanji je intenzitet vektora položaja $|\vec{r}| = const$, pa je $\frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0$. Međutim, kako se mijenja pravac i smjer vektora položaja onda je brzina tačke različita od nule.)

Ako se tačka kreće tako da se vektor brzine mijenja po pravcu, onda tačka vrši krivolinijsko kretanje, a ako je vektro brzine tokom vremena konstantnog pravca, onda tačka vrši pravolinijsko kretanje.

Ako se tačka kreće tako da je vektor brzine konstantnog intenziteta, za takvo kretanje kažemo da je ravnomjerno. U suprotnom je kretanje promjenljivo.

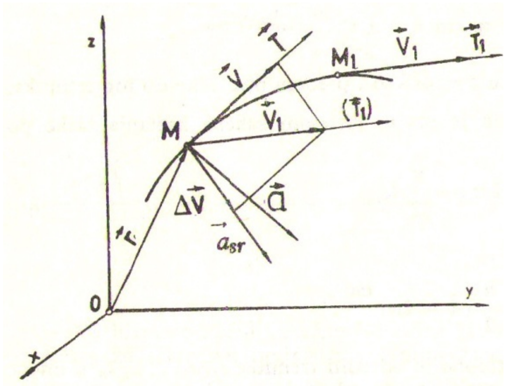
Dimenzija brzine je

$$[\vec{v}] = \frac{[dužina]}{[vrijeme]} = LT^{-1}$$

U tehničkom sistemu mjera dimenzija brzine je metar u sekundi $\left[\frac{m}{s}\right]$.

UBRZANJE TAČKE

<u>Vektor ubrzanja tačke karakteriše promjenu vektora brzine tačke u svakom trenutku</u>.



Neka se u trenutku t tačka nalazi u položaju M određenim vektorom položaja $\Delta\vec{r}$ i neka ima brzinu $\vec{v}$, a u trenutku $t_1 = t + \Delta t$ tačka je u položaju M_1 i ima brzinu $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Ovo znači da je u vremenskom intervalu Δt vektor brzine tačke dobio vektorski priraštaj $\Delta\vec{v}$, koji karakteriše promjenu vektora brzine po pravcu i intenzitetu. Ako u tačku M prenesemo paralelno vektor brzine $\vec{v}_1$ i konstruišemo paralelogram u kojem je vektor $\vec{v}_1$ dijagonala, onda je jedna stranica vektorski priraštaj $\Delta\vec{v}$ brzine $\vec{v}$. Dijeljenjem vektora $\Delta\vec{v}$ sa intervalom vremena Δt, dobićemo <u>srednje ubrzanje za interval vremena</u> Δt

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{t_1 - t}$$

Vektor srednjeg ubrzanja tačke utoliko tačnije odražava promjenu vektora brzine ukoliko je manji interval vremna Δt.

<u>Vektor ubrzanja tačke u datom trenutku vremena</u> dobijemo za granični slučaj, kada $\Delta t \to 0$,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

Kako je vektor brzine tačke jednak izvodu po vremenu vektora položaja tačke, može se napisati da je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Vektor ubrzanja tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora brzine tačke po vremenu, ili drugom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

U opštem slučaju krivolinijskog kretanja <u>tačke vektor ubrzanja karakteriše promjenu vektora brzine tačke tokom vremena po intenzitetu, pravcu i smjeru</u>. Iz ovog slijedi da je ubrzanje tačke jednako nuli samo kada je brzina tačke tokom vremena konstantna po pravcu i intenzitetu, tj. u slučaju ravnomjernog pravolinijskog kretanja.

Intenzitet vektora ubrzanja jednak je intenzitetu vektora brzine po vremenu

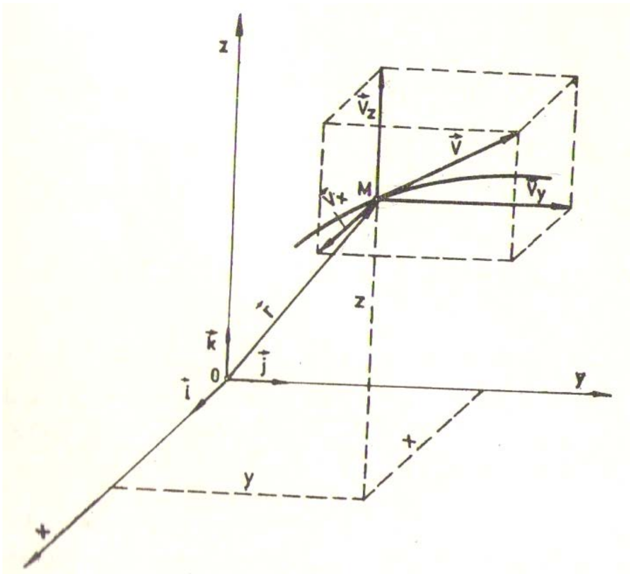
$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|, \text{ a nije jednak } |\vec{a}| \neq \frac{d|\vec{v}|}{dt}.$$

(Primjer krivolinijskog kretanja kada je vektor brzine konstantan po intenzitetu a ne i po poravcu)

Dimenzija ubrzanja je

$$[\vec{a}] = \frac{[brzina]}{[vrijeme]} = \frac{[dužina]}{[vrijeme]^2} = LT^{-2}, \quad \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

BRZINA I UBRZANJE U DEKARTOVIM KOORDINATAMA



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Izvodi po vremenu jediničnih vektora jednaki su nuli.

Intenzitet brzine je

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Analogno se može izvesti i ubrzanje u Dekartovim koordinatama

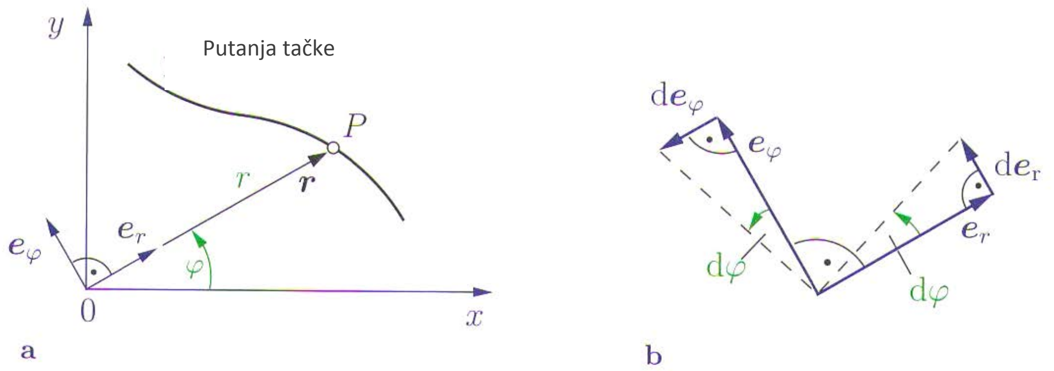
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right) = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Intenzitet ubrzanja je

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\ .$$

BRZINA I UBRZANJE TAČKE U POLARNIM KOORDINATAMA

Uvodimo dva okomita jedinična (bazna) vektora $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\varphi$, u pravcu potega i u pravcu normalnom na poteg, tako da se vektor položaja tačke može prikazati kao $\vec{r} = r\vec{e}_r$.



Jedinični vektori mijenjaju pravac pri kretanju tačke P, tj. zavise od vremena i postoje njihove derivacije (za razliku od jediničnih vektora Dekartovog koordinatnog sistema, koji su nepokretni).

Jedinični vektor $\vec{e}_r$ ima intenzitet jednak 1, a promjena tog vektora pri infinitezimalnoj promjeni ugla $d\varphi$ koja nastaje u infinitezimalnom trenutku vremena dt, može se vidjeti na gornjoj slici. Dakle, infinitezimalna promjena $d\vec{e}_r$ ima intenzitet $1 \cdot d\varphi$ (iz $|\vec{e}_r| d\varphi$) i okomita je na vektor $\vec{e}_r$, što odgovara pravcu drugog jediničnog vektora $\vec{e}_\varphi$. Možemo napisati :

$$d\vec{e}_r = d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Slično, promjena jediničnog vektora $\vec{e}_\varphi$ je vektor $d\vec{e}_\varphi$, intenziteta $1 \cdot d\varphi$ i pravca okomitog na vektor $\vec{e}_\varphi$, što odgovara pravcu vektora $-\vec{e}_r$, pa je

$$d\vec{e}_\varphi = d\varphi \cdot (-\vec{e}_r) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_r = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$$

Vektor brzine tačke je

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r\right) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$$

Vidimo da vektor brzine čine dvije komponente, radijalna brzina i poprečna (cirkularna) brzina, čiji intenziteti iznose

$v_r = \dot{r}$ - radijalna brzina

$v_\varphi = r\dot{\varphi}$ - poprečna (cirkularna) brzina

Treba primijetiti da je poprečna komponenta brzine vektor koji je okomit na poteg r i da se u opštem slučaju ne poklapa sa pravcem tangente na putanju u datom položaju tačke P.

Intenzitet brzine je

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

Ubrzanje tačke je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} =$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\left(-\dot{\varphi}\vec{e}_r\right) = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi$$

Ubrazanje tačke takođe čine dvije komponente, radijalna i poprečna (cirkularna), a njihovi intenziteti su:

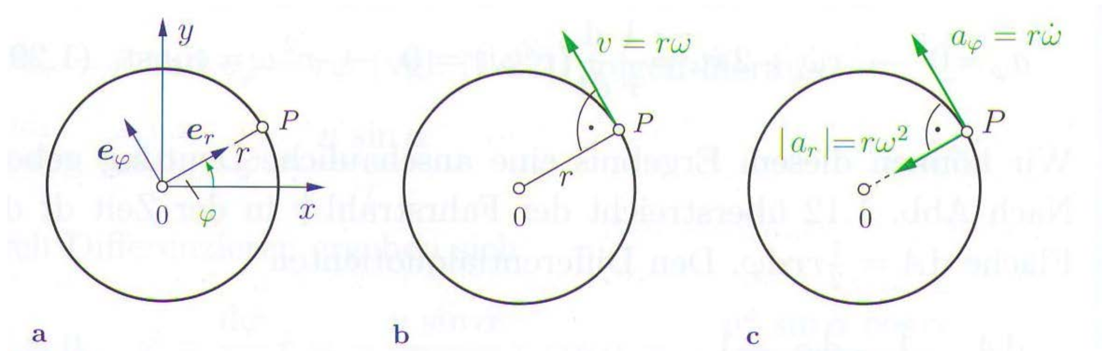
$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) \text{ - radijalno ubrzanje,}$$

$$a_\varphi = \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) \text{ - poprečno (cirkularno) ubrzanje.}$$

Intenzitet ubrzanja je

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}\ .$$

Poseban slučaj je kretanje tačke po kružnoj putanji



Ako poteg mjerimo od centra kružnice onda je $r = const$, pa je $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

Tada je radijalna brzina jednaka nuli, $v_r = \dot{r} = 0$, a brzina ima samo poprečnu komponentu

$$\vec{v} = \vec{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

čiji se pravac podudara sa pravcem tangente na kružnicu (putanju tačke) .

Ubrzanje tačke je

$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,,$$

a intenziteti komponenata su

$$a_r = -r\dot{\varphi}^2 \quad \text{i} \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi}\,.$$

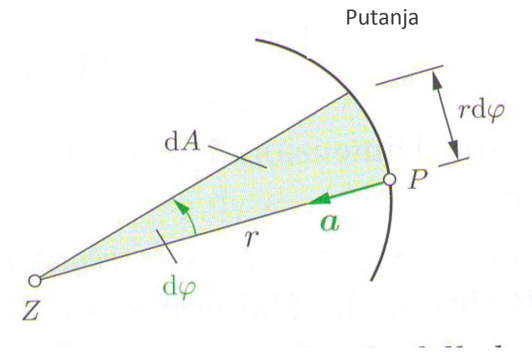
U opštem slučaju jedinični vektor potega pređe ugao $d\varphi$ u vremenskom intervalu dt. Omjer $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ naziva se ugaona brzina i često se označava sa ω ,a jedinica za ugaonu brzinu je $\left[\frac{rad}{s}\right] = \left[s^{-1}\right]$.

Derivacijom ugaone brzine po vremenu dobije se ugaono ubrzanje $\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}$, koje se često označava sa ε i ima jedinicu $\left[\frac{rad}{s^2}\right] = \left[s^{-2}\right]$.

U posebnom slučaju, kada je ugaona brzina konstantna, $\dot{\varphi} = \omega = const$, onda je brzina tačke na kružnici stalnog intenziteta $v = r\omega$, a poprečno ubrzanje je jednako nuli. Ipak, radijalna komponenta ubrzanja ima intenzitet $a_r = r\omega^2$ i usmjerena je ka centru kružnice, a karakteriše poromjenu pravca vektora brzine.

Centralno kretanje

Još jedan slučaj kretanja tačke u ravni je tzv. centralno kretanje. Kod ovakvog kretanja vektor ubrzanja stalno je usmjeren ka jednoj tački , tj. centru Z (pravac vektora ubrzanja stalno prolazi kroz jednu tačku). Ovakvo kretanje postoji u prirodi , na ovaj način kreću se planete oko Sunca.



Kod centralnog kretanja iščezava poprečna komponenta ubrzanja ako ishodište koordinatnog sistema postavimo u centar Z:

$$a_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\varphi} = const$$

Ovaj rezultat se može prikazati preko površine $dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi$, koju opiše poteg r pri pomjeranju za ugao $d\varphi$, odakle proizilazi da je

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$

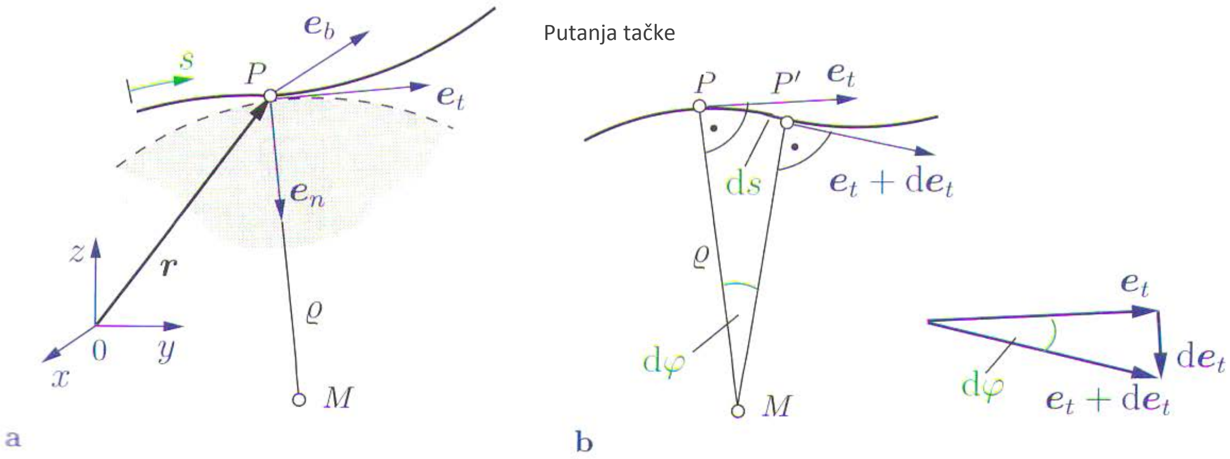
Ova veličinu naziva se <u>sektorska brzina</u> i predstavlja <u>brzinu promjene površine u jedinici vremena koju opisuje vektor položaja $\vec{r}$ pri kretanju tačke</u>. Dimenzija sektorske brzine je $\left[\frac{m^2}{s}\right]$.

Pri centralnom kretanju sektorska brzina je konstantna, $r^2\dot{\varphi} = const$. U fizici je ovo poznato kao Keplerov zakon, koji kaže da poteg koji spaja planetu sa Suncem pri kretanju planete opisuje jednake površine u jednakim vremenskim intervalima.

BRZINA I UBRZANJE U PRIRODNOM KOORDINATNOM SISTEMU

U nekim slučajevima zgodno je prostorno kretanje tačke opisati pomoću koordinatnog sistema smještenog u tački P koji se kreće po putanji zajedno sa tačkom. To je tzv. **<u>prirodni koordinatni sistem</u>** koji ima ortogonalne jedinične vektore: $\vec{e}_t$ - u smjeru tangente, $\vec{e}_n$ - u smjeru glavne normale, $\vec{e}_b$ - u smjeru binormale. Jedinični vektori u ovom redosljedu određuju desni koordinatni sistem. Tangenta i glavna normala određuju ravninu (oskulatornu ravan) u kojoj je i trenutna zakrivljenost krive. Jedinični vektor glavne normale $\vec{e}_n$ uvijek je usmjeren ka lokalnom središtu (centru) zakrivljenosti. Putanja tačke u položaju P ima lokalnu zakrivljenost ρ, koju nazivamo poluprečnik krivine putanje u tački. Često se ovaj poluprečnik zakrivljenosti označava i sa R_k.

Položaj tačke na putanji određen je dužinom luka s (podsjetimo, $s = s(t)$ je zakon kretanja tačke po putu), a vektor položaja tačke P je u tom slučaju $\vec{r} = \vec{r}\left(s(t)\right)$.



Brzina tačke je po definiciji promjena vektora položaja u datom trenutku vremena

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Kako priraštaj vektora položaja $d\vec{r}$ ima pravac tangente na putanju tačke, onda je intenzitet (modul) ovog priraštaja

$$\left|d\vec{r}\right| = ds \text{, pa je } d\vec{r} = \left|d\vec{r}\right| \cdot \vec{e}_t = ds \cdot \vec{e}_t \text{, odnosno } \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t .$$

Ovo znači da je količnik $\frac{d\vec{r}}{ds}$ jedinični vektor tangente, $\vec{e}_t$, i usmjeren je u stranu porasta krivolinijske koordinate s.

Vektor brzine tačke sada je

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t = \dot{s}\vec{e}_t$$

a intenzitet vektora brzine je $\left|\vec{v}\right| = v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$.

Ako je poznat intenzitet brzine tačke, moguće je odrediti krivolinijsku koordinatu s iz

$$s = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + s_0 .$$

Ubrzanje tačke definiše promjenu brzine u određenom trenutku vremena

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{e}_t\right) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} .$$

Nalaženje vremenske derivacije jediničnog vektora pokazano je u prethodnoj lekciji (polarne koordinate), tako da će sličan postupak biti pokazan i ovdje.

Jedinični vektor $\vec{e}_t$ u položaju P promjeni se kada se tačka pomjeri po putanji iz položaja P u položaj P′, pri promjeni ugla $d\varphi$ za vrijeme dt. U položaju P′ je vrijednost jediničnog vektora $\vec{e}_t + d\vec{e}_t$. Promjena $d\vec{e}_t$ vektora $\vec{e}_t$ ima pravac prema središtu zakrivljenosti M, tj. pravac jediničnog vektora normale $\vec{e}_n$, a veličina promjene je $1 \cdot d\varphi$.

Priraštaj luka ds od P do P′ određen je poluprečnikom zakrivljenosti ρ i infinitezimalnim putem $d\varphi$, tj. $ds = \rho d\varphi$, što daje $d\varphi = \frac{ds}{\rho}$.

Promjena $d\vec{e}_t$ jediničnog vektora $\vec{e}_t$ sada je

$$d\vec{e}_t = |d\vec{e}_t| \cdot \vec{e}_n = 1 \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_n = \frac{ds}{\rho}\vec{e}_n \quad , \text{ a odavde je } \quad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\vec{e}_n = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n .$$

Vektor ubrzanja tačke sada je

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{v}{\rho}\vec{e}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n .$$

Ubrzanje tačke određeno je vektorskim zbirom dviju komponenata od kojih je jedna usmejrena duž tangente na putanju tačke, a druga duž glavne normale i uvijek ima smjer prema središtu zakrivljenosti (usmjerena u konkavnu stranu putanje ka centru krivine).

Intenzitet vektora ubrzanja je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} .$$

Komponenta ubrzanja usmjerena duž tangenti naziva se tangencijalno (tangentno) ubrzanje tačke i ima intenzitet

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

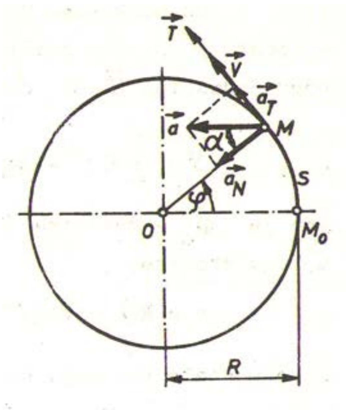
a komponenta usmjerena duž normale naziva se normalna komponenta i ima intenzitet

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

Tangencijalno ubrzanje karakteriše promjenu brzine tačke po intenzitetu, a normalno ubrzanje karakteriše promjenu pravca vektora brzine.

Vektor ubrzanja tačke leži u ravni vektora $\vec{e}_t$ i $\vec{e}_n$, tj. u oskulatornoj ravni.

Poseban slučaj kretanja po kružnoj putanji



Pri kretanju tačke po kružnici dužina luka s kojeg opiše pokretna tačka može se iskazati proizvodom poluprečnika r kružnice i ugla φ koji je u opštem slučaju funkcija vremena t, $\varphi = \varphi(t)$,

$$s = r\varphi$$

Kako je poluprečnik zakrivljenosti kružnice $\rho = r = const$, onda je intenzitet brzine tačke

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\varphi) = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} .$$

Vektor ubrzanje tačke

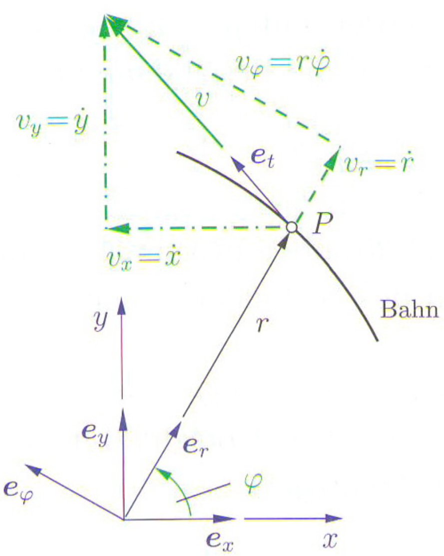
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{r}\vec{e}_n = r\ddot{\varphi}\vec{e}_t + r\dot{\varphi}^2\vec{e}_n .$$

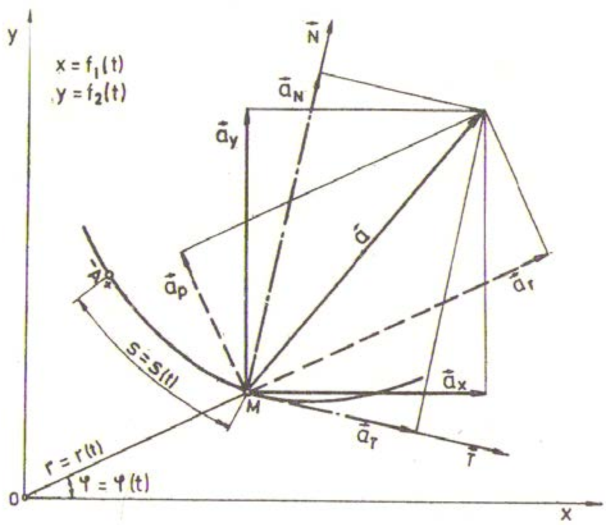
Intenziteti tangentne i normalne komponente ubrzanja su

$$a_t = r\ddot{\varphi} \qquad a_n = r\dot{\varphi}^2 .$$

Vektori brzine i ubrzanja tačke ne zavise od izbora postupka (koordinatnog sistema) kojim ih određujemo, već od prirode kretanja tačke što je određeno konačnim jednačinama kretanja tačke. Pravac, smjer i intenzitet vektora brzine i ubrzanja tačke ostaje isti bez obzira na izbor postupka kojim ih određijemo, a jednačine koje koristimo pri određivanju brzine i ubrzanja su sljedeće:

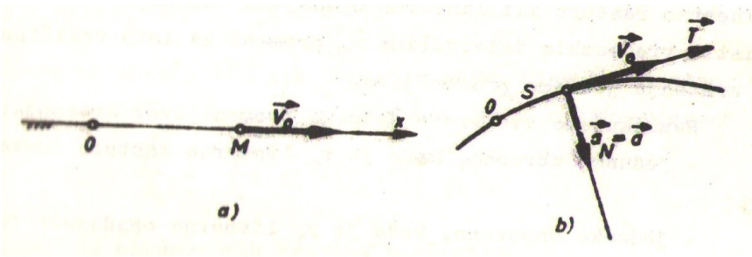
Postupak		**Zakon kretanja**	**Brzina**	**Ubrzanje**
Vektorski postupak		$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$
Koordinatni postupak	Dekartove koordinate	$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	$\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \dot{z} = \frac{dz}{dt}$ $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$	$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt},\ \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt},\ \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$ $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$
	Polarne koordinate	$r = r(t)$ $\varphi = \varphi(t)$	$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$	$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi$ $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$ $a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$
Prirodni postupak		$s = s(t)$	$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t = \dot{s}\vec{e}_t$ $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$ $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$



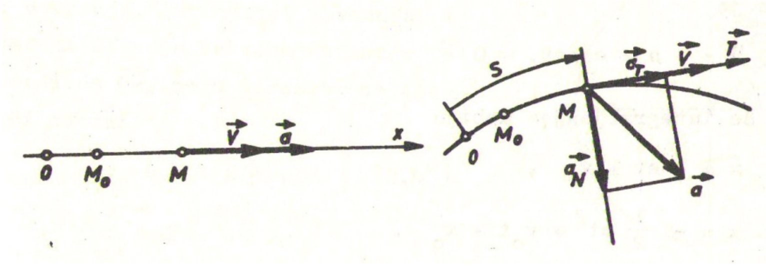


NEKI PRIMJERI PRAVOLINIJSKOG I KRIVOLINIJSKOG KRETANJA TAČKE

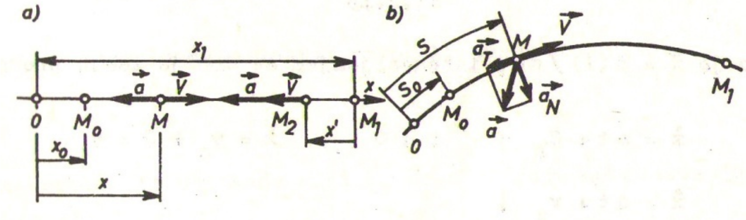
a) Ravnomjerno (jednoliko) kretanje tačke



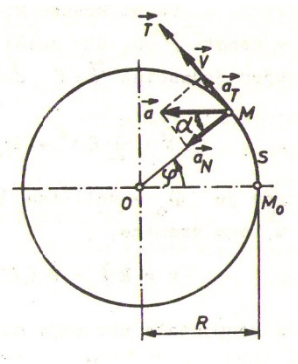
b) Ravnomjerno promjenljivo - ubrzano - kretanje tačke (ubrzanje $|\vec{a}| = \dfrac{dv}{dt} \rangle 0$)



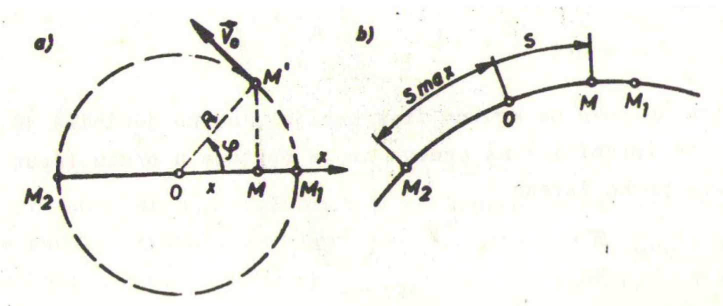
c) Ravnomjerno promjenljivo – usporeno - kretanje tačke (ubrzanje $|\vec{a}| = \dfrac{dv}{dt} \langle 0$)



d) Kružno kretanje tačke



e) Harmonijsko kretanje tačke



KINEMATIKA KRUTOG TIJELA

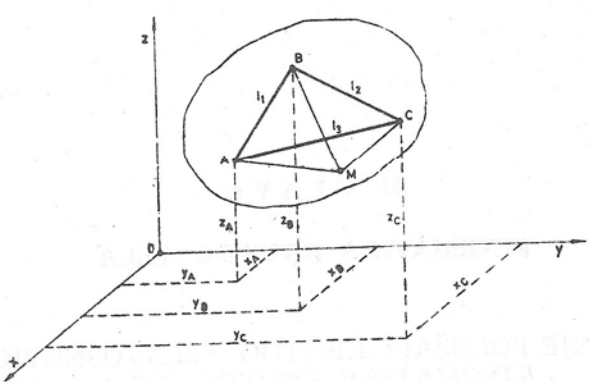
ODREĐIVANJE POLOŽAJA KRUTOG TIJELA U PROSTORU

Pod krutim tijelom u mehanici se podrazumijeva tijelo koje ne mijenja svoj geometrijski oblik.

Pod položajem krutog tijela u prostoru podrazumijeva se položaj svih tačaka tijela u odnosu na utvrđeni sistem referencije. S obzirom da su kod krutog tijela uzajamna rastojanja tačaka nepromjenljiva , moguće je položaj bilo koje tačke krutog tijela pri njegovom kretanju jednoznačno odrediti ako je poznato odstojanje te tačke od ostalih tačaka tijela.

Iz geometrije je poznato da je položaj krutog tijela u prostoru određen položajima tri nekolinearne tačke tog tijela. Pri kretanju krutog tijela, položaj svih tačaka tijela u odnosu na tačke A, B i C jednoznačno je određen i stoga je za definisanje položaja krutog tijela u prostoru dovoljno da se zna položaj tri nekolinearne tačke A, B i C tijela. Odavde slijedi da ako je poznat položaj tri nekolinearne tačke krutog tijela, onda je moguće odrediti položaj ma koje tačke tijela za vrijeme kretanje tijela u prostoru.

Položaj slobodnog krutog tijela pri kretanju u prostoru u odnosu na proizvoljni sistem referencije određen je sa šest nezavisnih parametara (svakoj tački odgovaraju tri nezavisna parametra-koordinate; od devet parametara koji definišu položaj tri tačke treba oduzeti tri jednačine veze između tih tačaka-rastojanja između tačaka koja su nepromjenljiva; na taj način ostaje šest nezavisnih parametara).



$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l_1^2$$
$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l_2^2$$
$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = l_3^2$$

Ako se uoči bilo koja tačka M krutog tijela njene koordinate takođe moraju zadovoljiti ovakve jednačine, kojim se izražava nepromjenljivost rastojanja tačke M od tačaka A,B i C.

Broj nezavisnih parametara, pomoću kojih se može jednoznačno odrediti položaj krutog tijela u prostoru u odnosu na proizvoljno izabrani sistem referencije, naziva se broj stepeni slobode krutog tijela.

Broj stepeni slobode krutog tijela ili tačke označava broj nezavisnih kretanja koje tijelo ili tačka može da izvodi u prostoru.

Tačka ima tri stepena slobode, jer njen položaj pri kretanju u prostoru određuju tri nezavisne koordinate: x, y i z. Slobodno kruto tijelo u prostoru ima šest stepeni slobode kretanja, jer ga određuje šest nezavisnih parametara. To znači da može da izvodi šest nezavisnih kretanja: tri translatorna pomjeranja u pravcu tri ose i tri obrtanja oko tri međusobno upravne ose.

Ukoliko postoje dodatna ograničenja koja potiču od drugih tijela-mehaničkih veza, broj stepeni slobode se smanjuje.

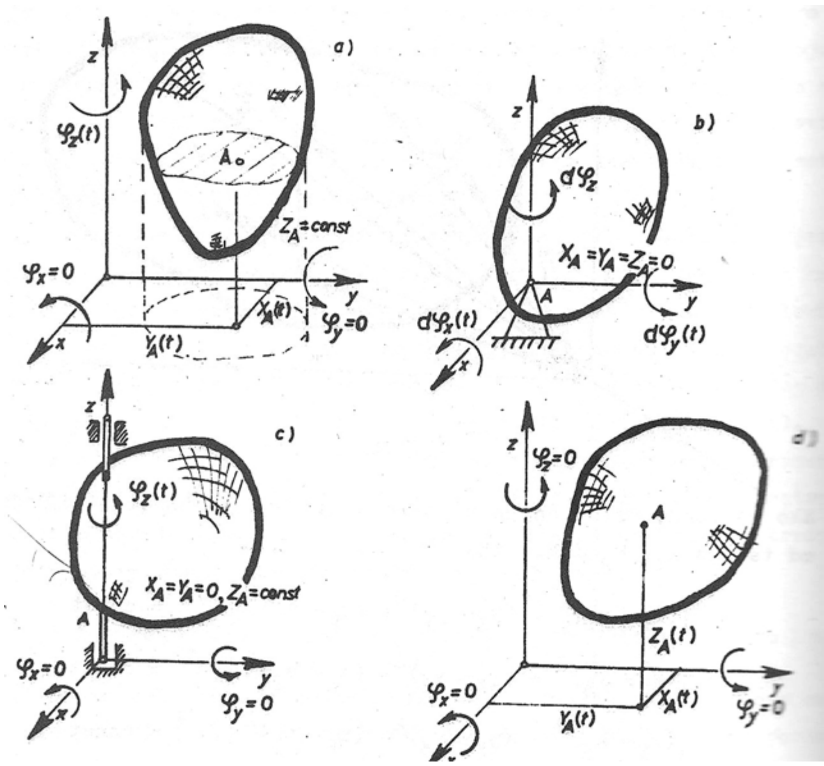
Položaj krutog tijela u prostoru može biti određen preko nezavisnih parametara koje nazivamo generalisane (opšte) koordinate. Generalisane koordinate tijela ili tačke su nezavisni parametri pomoću kojih se može jednoznačno odrediti položaj tijela u svakom trenutku vremena u odnosu na izabrani sistem referncije.

Osnovna kretanja krutog tijela su translatorno i obrtno kretanje. Iz ovih osnovnih kretanja sastoje se sva ostala kretanja djelimično vezanih (neslobodnih) krutih tijela.

Izvršena je podjela kretanja krutog tijela na:

1) Translatorno kretanje
2) Obrtanje oko nepokretne ose
3) Ravno kretanje
4) Obrtanje oko nepokretne tačke
5) Opšte kretanje
6) Složeno kretanje

Translatorni dio kretanja definiše se zakonima kretanja neke uočene tačke tijela (pol na slici označen sa A), a obrtni dio kretanja se definiše uglovima obrtanja oko osa. Na slici su prikazani primjeri kretanja krutog tijela i odgovarajući broj koordinata koje definišu broj stepeni slobode kretanja za dati tip kretanja tijela: a) ravno kretanje krutog tijela, b) sferno kretanje krutog tijela, c) obrtanje tijela oko nepokretne ose, d) translatorno kretanje krutog tijela.



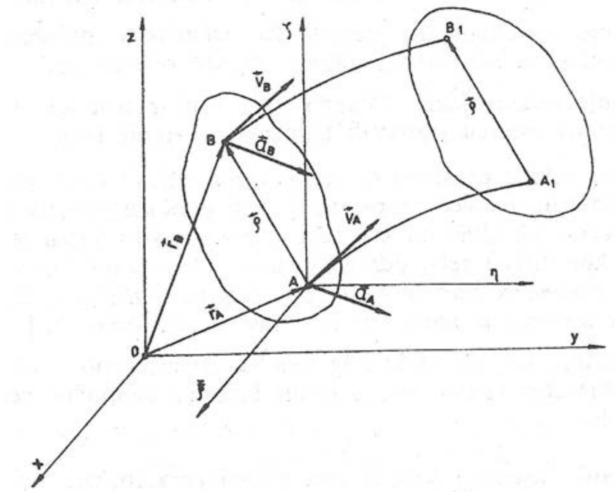
Osnovni zadaci kinematike krutog tijela analogni su zadacima kinematike tačke:

1) Utvrđivanje matematičkih metoda za definisanje položaja krutog tijela pri kretanju u prostoru u odnosu na izabrani sistem referencije
2) Određivanje kinematičkih karakteristika krutog tijela kao cjeline i svake tačke tijela posebno na osnovu poznatih jednačina kretanja tijela.

TRANSLATORNO KRETANJE KRUTOG TIJELA

Translatorno kretanje krutog tijela je takvo kretanja pri kojem se prava ili duž nepromjenljivo vezana sa tijelom pomjera zajedno sa njim tako da uvijek ostaje samoj sebi paralelna.

Putanje svih tačaka tijela su istovjetne - identične linije, samo međusobno pomjerene u prostoru.



Ako je poznat početni položaj tijela onda se cjelokupno kretanje tijela mođe izučiti preko kretanja samo jedna tačke-pola. Ako se zna poloažaj tačke A u svakom trenutku vremena, položaj bilo koje tačke, npr.B, određuje se pomoću vektora

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

gdje je vektor položaja $\vec{\rho} = \overrightarrow{AB}$ konstantnog intenziteta i pravca.

Brzina tačke B je

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

Kako je vektor položaja $\vec{\rho} = \overrightarrow{AB}$ konstantnog intenziteta i pravca, slijedi da je $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$, pa je

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

odnosno

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

Diferenciranjem brzine po vremenu dobije se

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

odnosno

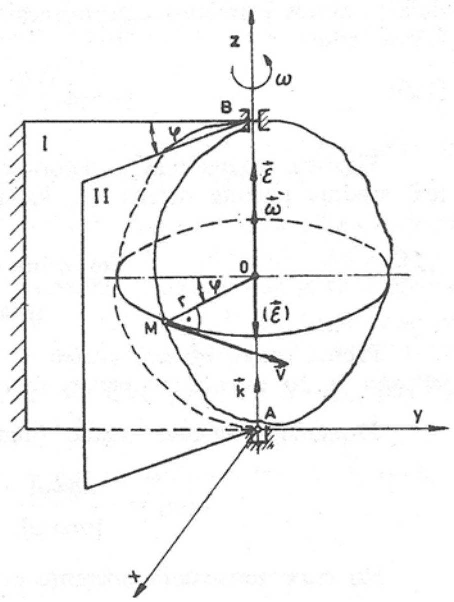
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \,.$$

Prema tome, pri translatornom kretanju krutog tijela sve tačke tijela se kreću na isti način, imaju iste putanje, vektore brzina i vektore ubrzanja.

Translatorno kretanje tijela u potpunosti je određeno kretanjem samo jedne, proizvoljne njegove tačke.

U zavisnosti od oblika putanje tačke translacija može biti pravolinijska i krivolinijska.

OBRTANJE KRUTOG TIJELA OKO NEPOKRETNE OSE



Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose je takvo kretanje tijela pri kome bilo koje dvije tačke tijela ostaju za vrijeme kretanja nepokretne.

Nepokretne su i sve ostale tačke koje se nalaze na pravoj liniji koja prolazi kroz te dvije tačke i koja se naziva obrtna osa. Sve ostale tačke tijela opisuju kružne putanje koje leže u ravnima okomitim na obrtnu osu i čiji su centri na obrtnoj osi

Položaj tijela pri obrtanju određen je uglom obrtanja φ, koji se mjeri od referentne vertikalne nepokretne ravni *I* i koji se neprekidno mijenja tokom vremena.

Zakon obrtanja tijela oko nepokretne ose iskazuje jednačina

$$\varphi=\varphi(t).$$

Položaj krutog tijela kao cjeline pri obrtanju oko nepokretne ose određen je sa jednim nezavisnim parametrom,uglom obrtanja, tako da tijelo ima jedan stepen slobode kretanja.

UGAONA BRZINA I UGAONO UBRZANJE TIJELA

Kinematičke karakteristike tijela kao cjeline pri njegovom obrtanju oko nepokretne ose su ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε.

Srednja ugaona brzina je definisana za interval vremena $\Delta t=t_2-t_1$ sa

$$\omega_{sr}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}$$

dok je ugaona brzina tijela u datom trenutku vremenat veličina kojoj teži srednja ugaona brzina kada interval vremena teži nuli:

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$$

Ugaona brzina ω krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose jednaka je po intenzitetu prvom izvodu ugla obrtanja po vremenu.

Dimenzija ugaone brzine je

$$[\omega]=\frac{[ugao]}{[vrijeme]}=\frac{radijan}{sekund}=\frac{1}{s}=s^{-1}$$

Srednje ugaono ubrzanje je definisano za interval vremena $\Delta t=t_2-t_1$ sa

$$\varepsilon_{sr}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2-t_1}$$

dok je ugaono ubrzanje tijela u datom trenutku vremenat veličina kojoj teži srednje ugaono ubrzanje kada interval vremena teži nuli:

$$\varepsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega} \quad \text{ili} \quad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi}$$

Ugaono ubrzanje tijela koje se obrće oko nepokretne ose u datom trenutku vremena po intenzitetu je jednako prvom izvodu po vremenu ugaone brzine ili drugom izvodu po vremenu ugla obrtanja tijela.

Dimenzija ugaonog ubrzanja je

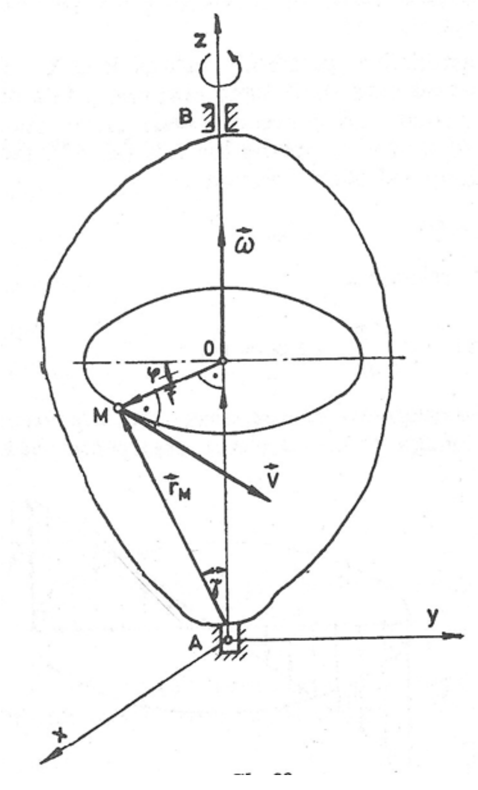
$$\left[\varepsilon\right]=\frac{\left[ugaona\ brzina\right]}{\left[vrijeme\right]}=\frac{radijan}{s^2}=s^{-2}$$

<u>Ugaona brzina i ugaono ubrzanje tijela koje se obrće oko nepokretne ose jesu vektorske veličine.</u>

Pravac vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ određen je pravcem nepokreten (obrtne) ose. Vektor $\vec{\omega}$ je usmjeren duž obrtne ose u onu stranu iz koje se vidi obrtanje krutog tijela u smjeru suprotnom od obrtanja kazaljke na satu. Ako je $\omega=\dot{\varphi}$>0, onda je obrtanja pozitivno, tj.obrtanje se vrši u smjeru suprotnom od obrtanja kazaljke na satu. Ako je $\omega=\dot{\varphi}$<0, onda je obrtanja negativno, tj.obrtanje se vrši u smjeru obrtanja kazaljke na satu.

Vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ takođe je usmjeren duž obrtne ose. Ako je $\varepsilon=\dot{\omega}$>0, vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ imaju isti smjer. Ako je $\varepsilon=\dot{\omega}$<0, vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ imaju različit smjer.

BRZINE TAČAKA TIJELA KOJE SE OBRĆE OKO NEPOKRETNE OSE



(Pogledati kinematiku tačke, kretanje tačke definisano prirodnim postupkom-specijalni slučaj kretanja tačke po kružnoj putanji.)

Pri rotaciji tijela oko nepokretne ose sve tačke tijela opisuju kružne putanje, koje leže u ravninama okomitim na osu rotacije. Radijalni pravci svih tačaka tijela prelaze u jednakom vremenu jednak uglao φ.

Ako se uoči proizvoljna tačka na rastojanju *r* od obrtne ose (r je poluprečnik kružne putanje te tačke), tada se zakon kretanja tačke po kružnoj putanji može iskazati izrazom $s=r\varphi(t)$, a intenzitet brzine tačke određen je sa

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(r\varphi)=r\frac{d\varphi}{dt}=r\dot{\varphi}=r\omega .$$

Brzina tačke M tijela određena ovim izrazom naziva se obimna (obrtna) ili linearna brzina tačke.

Ugaona brzina ω je kinematička karakteristika tijela kao cjeline (jednaka za sve tačke tijela), pa su brzine pojedinih tačaka tijela pri obrtanju oko nepokretne ose proporcionalne rastojanjima tih tačaka od nepokretne ose.

Tačke tijela koje leže na nepokretnoj osi su nepokretne, tj. brzine su im jednake nuli.

<u>Ojlerova formula</u>

Vektor brzine $\vec{v}$ proizvoljne tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose može se odrediti pomoću Ojlerove formule:

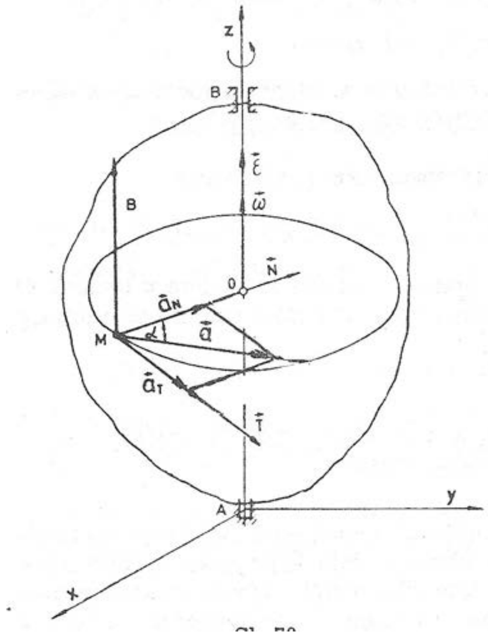
$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{\omega}\left(\vec{r}_M-\overrightarrow{AO}\right)=\vec{\omega}\times\vec{r}_M-\vec{\omega}\times\overrightarrow{AO}=\vec{\omega}\times\vec{r}_M$$

jer su vektori $\vec{\omega}$ i $\overrightarrow{AO}$ kolinearni, pa je njihov vektorski proizvod jednak nuli.

Intenzitet vektora brzine je

$$\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{\omega}\times\vec{r}_M\right|=\omega r_M \sin\angle\left(\vec{\omega},\vec{r}_M\right)=\omega r_M \sin\gamma=r\omega$$

UBRZANJA TAČAKA TIJELA KOJE SE OBRĆE OKO NEPOKRETNE OSE



(Pogledati kinematiku tačke, kretanje tačke definisano prirodnim postupkom-specijalni slučaj kretanja tačke po kružnoj putanji.)

Ukupno ubrzanje neke tačke M tijela koj se obrće oko nepokretne ose može se razložiti na tangentnu i normalnu komponentu.

$$a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}=r\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$

$$a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(r\omega)=r\frac{d\omega}{dt}=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=r\ddot{\varphi}=r\varepsilon$$

$$a_N=\frac{v^2}{R_k}=\frac{r^2\omega^2}{r}=r\omega^2=r\dot{\varphi}^2$$

Vektor ubrzanja proizvoljne tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose može se odrediti polazeći od Ojlerove formule za vektor brzine tačke:

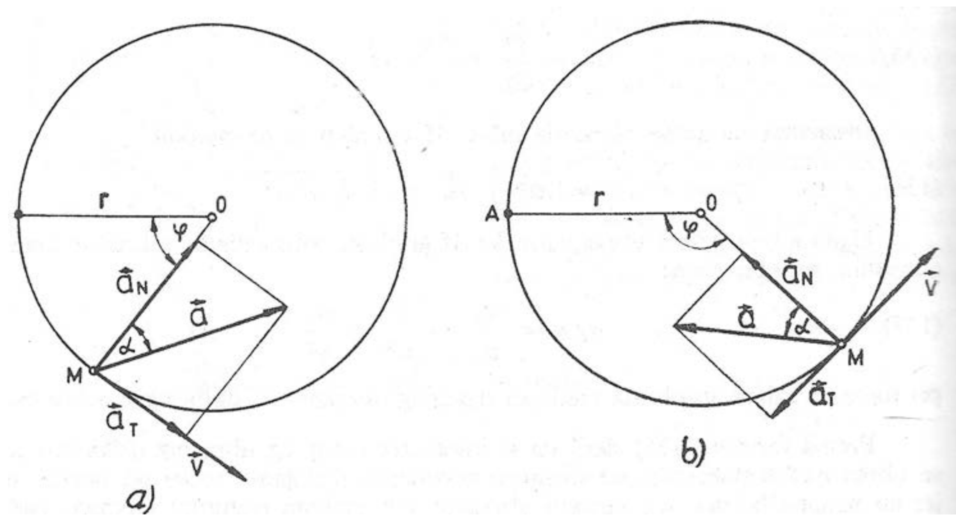
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}_M)=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_M+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_M}{dt}=$$
$$=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_M+\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_M+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_M)=\vec{a}_T+\vec{a}_N$$

Intenziteti komponenti ubrzanja su

$$|\vec{a}_T|=|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_M|=\varepsilon\, r_M\sin\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{r}_M)=\varepsilon\, r_M\sin\gamma=\varepsilon\, r$$

$$|\vec{a}_N|=|\vec{\omega}\times\vec{v}|=\omega v\sin\sphericalangle(\vec{\omega},\vec{v})=\omega v\sin 90^0=\omega v=r\omega^2$$

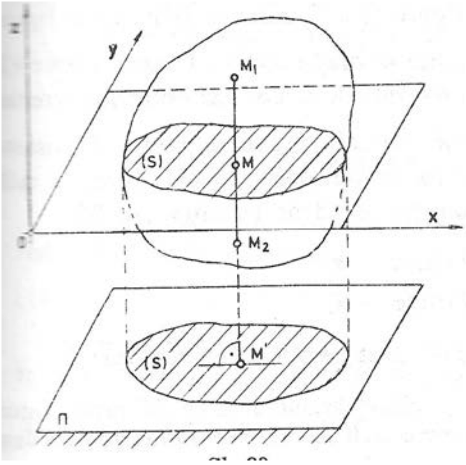
Na sljedećim slikama prikazani su slučajevi: a) ubrzanog obrtanja, b) usporenog obrtanja tijela oko nepokretne ose.

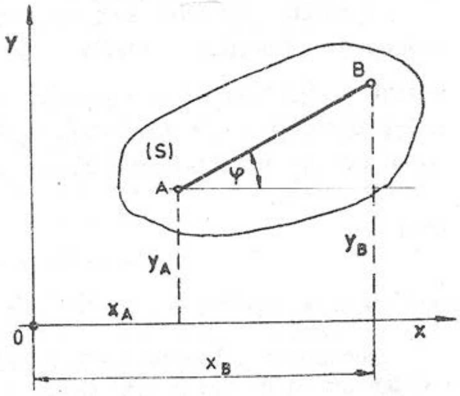


RAVNO KRETANJE KRUTOG TIJELA

JEDNAČINE RAVNOG KRETANJA KRUTOG TIJELA

Ravno kretanje krutog tijela je takvo kretanje pri kome se sve tačke tijela kreću paralelno prema nekoj nepokretnoj ravni Π, odnosno kada su vektori brzina svih tačaka tijela paralelni prema nekoj nepokretnoj ravni Π.





Sve tačke tijela koje leže na pravoj M_1MM_2 koja je upravna na nepokretnoj ravni Π kreću se na isti način, tj. imaju jednake trajektorije , brzine i ubrzanja. Zbog toga je dovoljno proučiti kretanje presjeka *S* tog tijela u ravni *xOy* koja je paralelna sa nepokretnom ravni Π. Presjek *S* zovemo ravna figura.

Položaj presjeka *S* u ravni *xOy* je u potpunosti određen ako se zna položaj dvlju tačaka, $A(x_A,y_A)$ i $B(x_B,y_B)$, tog presjeka u odnosu na Dekartov sistem referencije. Pošto je rastojanje između tačaka *A* i *B* nepromjenljivo, tj.

$$\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = l^2$$

to su od četiri koordinate tačaka *A* i *B* samo tri nezavisne, a četvrta se određuje iz prethodne jednačine.

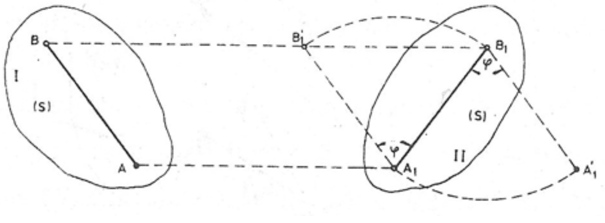
Ravno kretanje tijela određeno je sa tri nezavisna parametra (koordinate), što znači da tijelo ima tri stepena slobode, tj. može da izvodi tri nezavisna kretanja: dvije translacije duž osa x i y i jednu rotaciju oko ose upravne na ravan presjeka *S* (ravne figure).

Konačne jednačine ravnog kretanja krutog tijela su

$$x_A = x_A\left(t\right),\; y_A = y_A\left(t\right),\; \varphi = \varphi\left(t\right)$$

Prve dvije jednačine određuju translatorno kretanje tijela (translacija pola A), a treća jednačina određuje obrtanje tijela oko ose koja prolazi kroz proizvoljno izabran pol (pol A) u ravni figure *S* a upravna je na ravan figure.

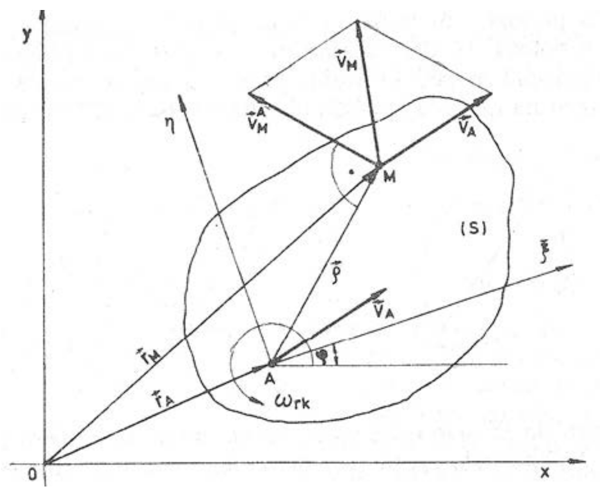
RAZLAGANJE RAVNOG KRETANJA KRUTOG TIJELA NA TRANSLATORNO I OBRTNO KRETANJE



Pri prelasku ravne figure S iz jednog u drugi položaj (iz položaja I u položaj II), možemo ravno kretanje razložiti na translatorno i obrtno kretanje: figuru najprije pomjerimo translatorno tako da se tačka A (pol) poklopi sa tačkom A_1, a potom izvršimo rotaciju figure za ugao φ oko ose koja prolazi kroz tačku A_1 (obrtanje oko pola).

<u>Kinematičke karakteristike tijela kao cjeline pri ravnom kretanju</u> tijela su: vektor brzine $\vec{v}_A$ pola A i vektor ubrzanja $\vec{a}_A$ pola A pri translatornom kretanju ravne figure; vektor ugaone brzine $\vec{\omega}_{rk}$ i vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}_{rk}$ obrtanja tijela oko ose koja prolazi kroz pol A (ugaona brzina i ugaono ubrzanje ravnog kretanja).
Sa promjenom pola ravne figure mijenjaju se kinematičke karakteristike translatornog kretanja tijela, dok ugaone karakteristike koje karakterišu obrtno kretanje ostaju nepromjenjene (ne zavise od izbora pola).

BRZINE TAČAKA TIJELA KOJE VRŠI RAVNO KRETANJE



<u>Brzina proizvoljne tačke M ravne figure</u> određena je sa

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A + \vec{\rho}\right) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A$$

Veličina $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_M^A$ je brzina koju tačka M ima usljed obrtanja ravne figure S oko ose Aζ koja prolazi kroz pol A a upravna je na ravan figure S, i ova brzina se naziva <u>obrtna brzina tačke M u odnosu na pol A</u>.

Koristeći Ojlerovu formulu može se napisati

$$\vec{v}_M^A = \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho}$$

pa je brzina tačke M

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho}\ .$$

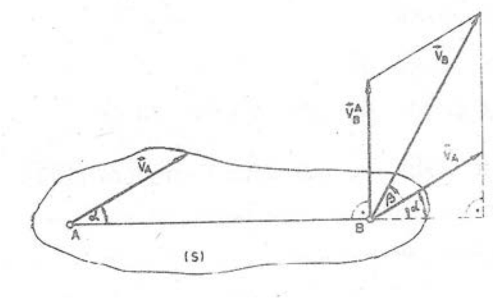
Intenzitet vektora obrtne brzine tačke M u odnosu na pol A je

$$\left|\vec{v}_M^A\right| = \omega_{rk}\rho\sin\angle\left(\vec{\omega}_{rk}, \vec{\rho}\right) = \omega_{rk}\rho\sin 90^0 = \omega_{rk}\rho = \overline{AM}\omega_{rk}\ .$$

Intenzitet obrtne brzine neke tačke tijela je srazmjeran rastojanju te tačke od usvojenog pola, a smjer vektora brzine zavisi od smjera ugaone brzine ravnog kretanja.

TEOREMA O PROJEKCIJAMA VEKTORA BRZINA TAČAKA RAVNE FIGURE

<u>Projekcije brzina dvaju tačaka ravne figure, $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$, na pravu koja spaja te dvije tačke, jednake su jedna drugoj.</u>



Brzina tačke B određena je izrazom

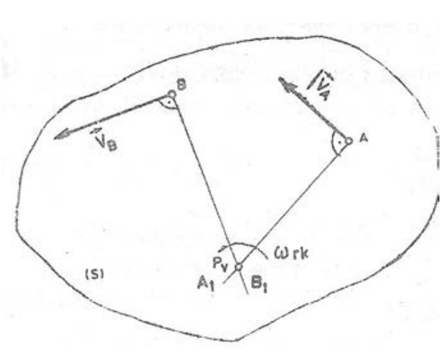
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$$

Projektovanjem ove jednačine na pravac prave AB, uzimajući u obzir da je $\vec{v}_B^A \perp \overline{AB}$, dobije se izraz

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

koji potvrđuje teoremu.

TRENUTNI POL BRZINA RAVNE FIGURE



Pri ravnom kretanju krutog tijela u svakom trenutku vremena postoji u ravni figure (S) jedna tačka čija je brzina jednaka nuli i ta se tačka naziva *trenutni pol brzina ravne figure* S.

Neka su u trenutku *t* brzine tačaka A i B, $\vec{v}_A \; i \; \vec{v}_B$, pri čemu vektori brzina nisu međusobno paralelni. Tačka P_v ravne figure (S) koja je određena presjekom pravih $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, pri čemu su ove prave upravne na vektore brzina $\vec{v}_A \; i \; \vec{v}_B$ respektivno, ima u datom trenutku *t* brzinu jednaku nuli $\vec{v}_{Pv} = 0$ i to je trenutni pol brzina ravne figure (S) za dati trenutak t.

Postojanje trenutnog pola brzina moguće je dokazati korišćenjem teoreme o projekcijama brzina: vektor brzine $\vec{v}_{Pv}$ pola P_v morao bi jednovremeno da bude upravan na dvije prave, $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, što je nemoguće, pa slijedi da teorema o projekcijama brzina može biti zadovoljena samo za $\vec{v}_{Pv} = 0$.

Pri kretanju ravne figure (S) položaj trenutnog pola brzina P_v se stalno mijenja i svakom trenutku vremena odgovara poseban položaj pola brzina ravne figure (S) , pa se stoga naziva trenutni pol brzina.

Određivanje brzina tačaka ravne figure pomoću trenutnog pola brzina

Brzina bilo koje tačke ravne figure (S) u datom trenutku vremena jednaka je obrtnoj brzini tačke koju ona ima pri obrtanju ravne figure (S) oko ose koja prolazi kroz trenutni pol brzina P_v, a upravna je na ravan figure.

Iz definicije brzine proizvoljne tačke ravne figure, ukoliko se za pol uzme trenutni pol brzina, slijedi

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_A^{Pv}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_B^{Pv}$$

Kako je $\vec{v}_{Pv} = 0$, slijedi da je $\vec{v}_A = \vec{v}_A^{Pv}$, $\vec{v}_B = \vec{v}_B^{Pv}$, a intenziteti ovih brzina su određeni izrazima

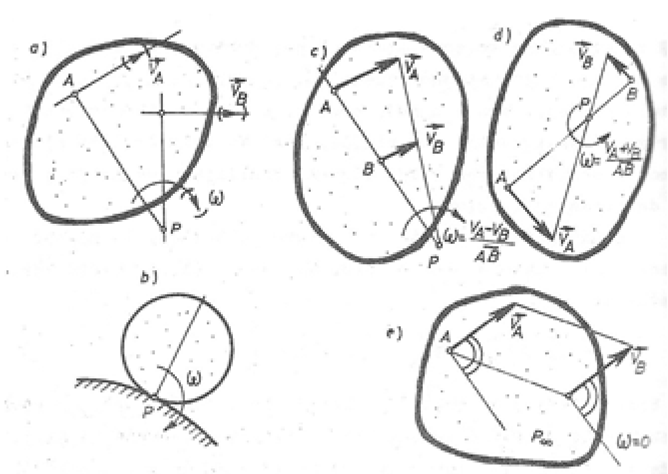
$$v_A = \overline{AP_v}\,\omega_{rk}, \quad v_B = \overline{BP_v}\,\omega_{rk}.$$

Intenzitet brzine bilo koje tačke ravne figure (S) jednak je proizvodu iz rastojanja tačke od trenutnog pola brzina (trenutnog poluprečnika obrtanja) i ugaone brzine ravnog kretanja krutog tijela.

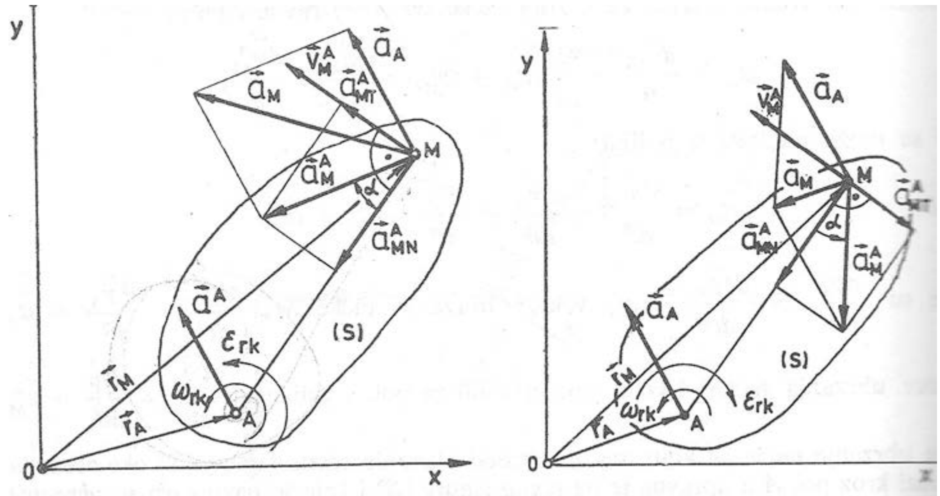
Trenutna vrijednost ugaone brzine obrtanja ravne figure (S) određena je sa

$$\omega_{rk} = \frac{v_A}{\overline{AP_v}} = \frac{v_B}{\overline{BP_v}} = \frac{v_C}{\overline{CP_v}} = \cdots = \frac{v_M}{\overline{MP_v}}.$$

Neki primjeri određivanje trenutnog pola brzina ravne figure



UBRZANJA TAČAKA KRUTOG TIJELA KOJE VRŠI RAVNO KRETANJE



Ubrzanje proizvoljne tačke M ravne figure (S) dobićemo diferenciranjem po vremenu vektora brzine te tačke

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{v}_M^A\right) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_M^A}{dt}$$

$$\vec{a}_M = \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_A + \vec{\rho}) = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A \; .$$

Ubrzanje $\vec{a}_M^A$ je ubrzanje tačke M koje ona ima usljed obrtanja ravne figure (S) oko ose koja prolazi kroz pol A a upravna je na ravan figure (S), i naziva se <u>obrtno ubrzanje tačke M oko pola A</u>.

<u>Ubrzanje bilo koje tačke M ravne figure</u> (S) <u>jednako je vektorskom (geometrijskom) zbiru ubrzanja tačke A koja je uzeta za pol i obrtnog ubrzanja tačke M oko pola A pri njenom obrtanju sa telom oko ose koja prolazi kroz pola A a upravna je na ravan figure</u> (S).

Pošto se pri obrtnom kretanju ravne figure (S) tačka M kreće po kružnoj putanji, čiji se centar nalazi u polu A koji tada smatramo da miruje, to se obrtno ubrzanje $\vec{a}_M^A$ tačke M može izraziti u obliku vektorskog zbira dvije komponente ubrzanja: jedne usmjerene duž normale, a druge usmjerene duž tangente na kružnu putanju, tj.

$$\vec{a}_M^A = \vec{a}_{MN}^A + \vec{a}_{MT}^A$$

<u>Komponenta $\vec{a}_{MN}^A$ naziva se obrtno normalno ubrzanje tačke M oko pola A, a komponenta $\vec{a}_{MT}^A$ naziva se obrtno tangentno ubrzanje tačke M oko pola A.</u>

Vektor obrtnog tangentnog ubrzanja tačke M oko pola A usmjeren je po tangenti na kružnu putanju pri obrtnom kretanju tačke M, tj. uvijek je normalan na vektoru $\overrightarrow{AM}$ ($\vec{a}_{MT} \perp \overrightarrow{AM}$) i ima smjer obrtanja koji odgovara smjeru ugaonog ubrzanja ravnog kretanja.

Vektor obrtnog normalnog ubrzanja tačke M oko pola A usmjeren je po normali na kružnu putanju pri obrtnom kretanju tačke M, tj. ima pravac na vektora $\overrightarrow{MA}$ ($\vec{a}_{MN} \parallel \overrightarrow{MA}$) i smjer od tačke M ka polu A.

Intenziteti ovih komponenata su

$$\left|\vec{a}_{MN}\right| = \overline{AM}\;\omega_{rk}^2$$

$$\left|\vec{a}_{MT}\right| = \overline{AM}\;\varepsilon_{rk}$$

tako da je intenzitet obrtnog ubrzanja $\vec{a}_M^A$

$$\left|\vec{a}_M^A\right| = \sqrt{\left(a_{MN}^A\right)^2 + \left(a_{MT}^A\right)^2} = \overline{AM}\sqrt{\omega_{rk}^4 + \varepsilon_{rk}^2}$$

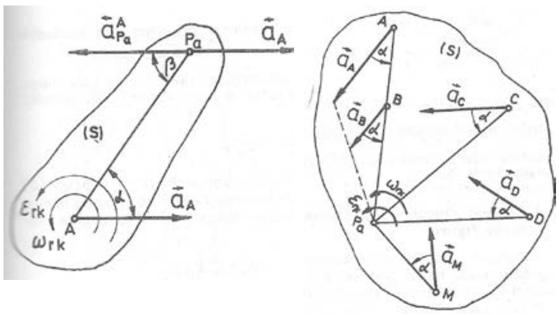
a ugao koji vektor $\vec{a}_M^A$ gradi sa vektorom $\overline{AM}$ određen je sa

$$tg\alpha = \frac{\left|a_{MT}^A\right|}{a_{MN}^A} = \frac{\left|\varepsilon_{rk}\right|}{\omega_{rk}^2} \Rightarrow \alpha = arc\ tg \frac{\left|\varepsilon_{rk}\right|}{\omega_{rk}^2}$$

Vektor ubrzanja tačke M može se odrediti polazeći od Ojlerove formule za obrtnu brzinu tačke M:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho}\right) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_{rk}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{rk} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} =$$
$$= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{rk} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{v}_M^A = \vec{a}_A + \vec{a}_{MT}^A + \vec{a}_{MN}^A$$

TRENUTNI POL UBRZANJA RAVNE FIGURE

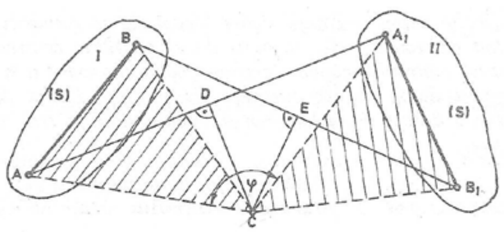


Pri ravnom kretanju krutog tijela u svakom trenutku vremena postoji tačka P_a ravne figure *S* čije je ubrzanje jednako nuli i ta tačka se naziva trenutni pol ubrzanja.

Položaj trenutnog pola ubrzanja odrediti se tako da se zakrene pravac vektora ubrzanja $\vec{a}_A$ neke tačke A za ugao α u smjeru ugaonog ubrzanja, a zatim se na tako konstruisanom pravu prenese odsječak $\overline{AP_a}$. Kraj P_a odsječka $\overline{AP_a}$ jeste trenutni pol ubrzanja. Ugao α i odsječak $\overline{AP_a}$ određeni su sa

$$tg\alpha = \frac{\left|a_{MT}^A\right|}{a_{MN}^A} = \frac{\left|\varepsilon_{rk}\right|}{\omega_{rk}^2} \Rightarrow \alpha = arc\ tg \frac{\left|\varepsilon_{rk}\right|}{\omega_{rk}^2} \quad , \qquad \overline{AP_a} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega_{rk}^4 + \varepsilon_{rk}^2}} .$$

TEOREMA O CENTRU OBRTANJA ZA KONAČNO POMJERANJE RAVNE FIGURE (BERNULI-ŠALOVA TOEREMA)



Ravnu figuru (S)možemo pomjeriti iz jednog u bilo koji drugi položaj u istoj ravni jednim obrtanjem ravne figure oko nekog nepokretnog centra C koji se naziva *centar konačnog obrtanja ravne figure*.

Ova teorema naziva se Bernuli-Šalova toerema i proističe iz činjenice da se za pol ravne figure može izabrati bilo koja tačka figure.

Ako posmatramo dva uzastopna položaja ravne figure, koji odgovaraju trenucima t i $t_1=t+\Delta t$, onda se odsječak AB pomjeri u položaj A_1B_1 za vrijeme Δt. Ako se ovo pomjeranje može ostvariti samo jednim obrtanjem, onda tačke A i B opisuju kružne lukove sa jednim centrom, pri čemu su duži AA_1 i BB_1 sječice tih kružnih lukova. Poznato je da centar kruga leži na normali povučenoj na sredini dužine sječice, tako da se centar C kruga mora nalaziti u presjeku normala povučenih u tačkama D i E, koje su središta duži AA_1 i BB_1.

Tačka C određena na ovaj način je centar konačnog pomjeranja ravne figure (S).

Obrtanjem oko tačke C za ugao φ moguće je ravnu figuru pomjeriti iz položaja I u položaj II.

U graničnom slučaju, kada vrijeme Δt pomjeranja figure teži nuli, položaj centra C rotacije ravne figure jeste tačka nepokretne ravni sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa trenutni pol brzina P_v ravne figure. Svakom narednom položaju ravne figure odgovara poseban položaj centra rotacije.

OBRTANJE KRUTOG TIJELA OKO NEPOKRETNE TAČKE

(SFERNO KRETANJE KRUTOG TIJELA)

JEDNAČINE SFERNOG KRETANJA KRUTOG TIJELA

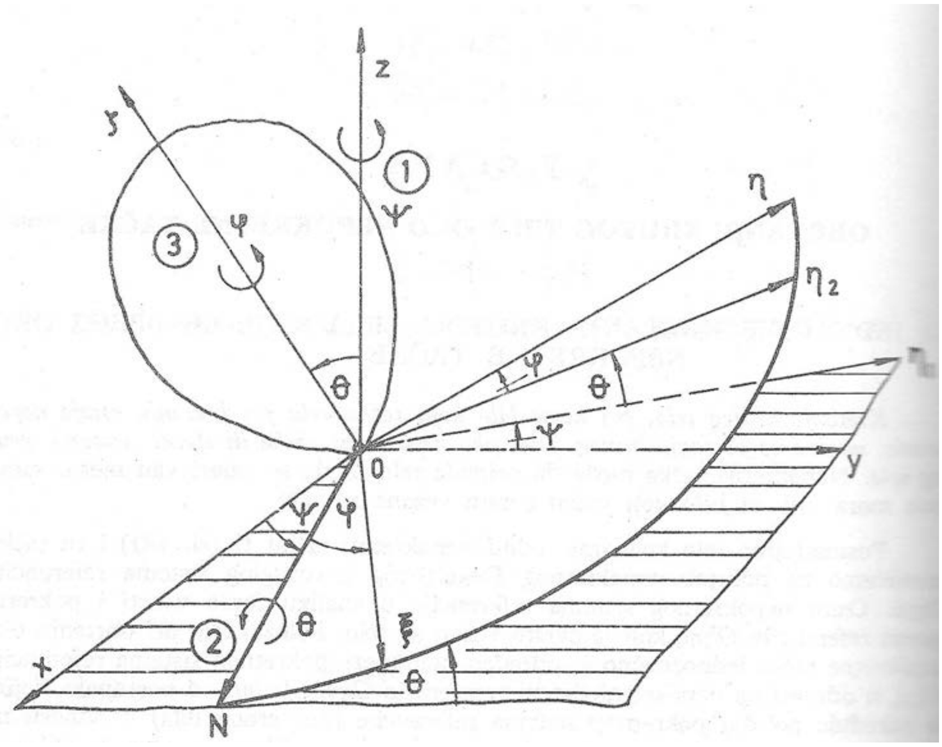
Kretanje krutog tijela, pri kome bilo koja tačka tijela pri kretanju ostaje nepokretna, naziva se obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke ili sferno kretanje krutog tijela.

Položaj tijela pri obrtanju oko nepokretne tačke jednoznačno je određen položajem pokretnog sistema referencije $O\xi\eta\zeta$ (sistem koji je čvrsto vezan za tijelo) u odnosu na nepokretni sistem referencije $Oxyz$, pri čemu je nepokretna tačka O ishodište ovih koordinatnih sistema.

Jedan od postupaka kojim se definiše položaj pokretnog sistema referencije u odnosu na nepokretni sistem referencije je Ojlerov postupak. Ojler je pokazao da se položaj tijela pri obrtanju oko nepokretne tačke jednoznačno može odrediti preko tri ugla koji se po njemu nazivaju Ojlerovi uglovi:

- ψ - ugao precesije
- θ - ugao nutacije
- φ - ugao sopstvene rotacije

Neka se u početnom trenutku vremena pokretni sistem referencije $O\xi\eta\zeta$ poklapa sa nepokretnim sistemom referencije Oxyz. Preko tri uzastopna nezavisna obrtanja (rotacije) tijela: za ugao ψ oko ose Oz, zatim za ugao θ oko čvorne ose ON, i konačno, za ugao φ oko ose $O\xi$, može se pokretni sistem referencije $O\xi\eta\zeta$ (pokretno tijelo) prevesti u bilo koji položaj u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz(nepokretno tijelo).



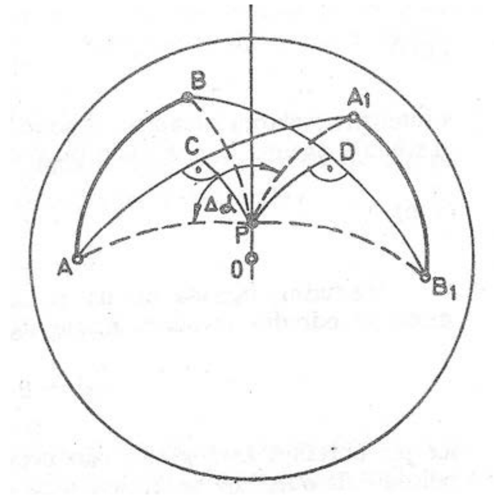
Pri obratnju krutog tijela oko nepokretne tačke uglovi ψ, φ i θ mijenjaju se tokom vremena i oni su neke funkcije vremena t,

$$\psi = f1(t) \qquad \varphi = f2(t) \qquad \theta = f3(t) .$$

Ove jednačine u potpunosti određuju kretanje tijela oko nepokretne tačke i nazivaju se konačne jednačine obrtanja krutog tijela oko neporetne tačke ili konačne jednačine sfernog kretanja krutog tijela.

Osa ON oko koje tijelo vrši obrtanje za ugao nutacije θ naziva se čvorna osa.

OJLER-DALAMBEROVA TEOREMA



Svako pomjeranje krutog tijela, koje ima jednu nepokretnu tačku O iz jednog položaja u drugi položaj, može se izvršiti jednim obrtanjem tog tijela oko ose konačne (ekvivalentne) rotacije koja prolazi kroz nepokretnu tačku O.

Neka je u trenutrku *t* položaj tijela određen položajem tačaka A i B na sferi, a u trenutku $t_1=t+\Delta t$ položaj tijela određen je položajem tačaka A_1i B_1. Jednim obrtanjem tijela oko neke ose koja prolazi kroz tačku O moguće je tačke A i B na sferi prevesti u položaj A_1 i B_1 na toj sferi. Spojimo tačke A i A_1 i B i B_1 lucima velikih krugova i iz sredine lukova $\overset{\frown}{AA_1}$ i $\overset{\frown}{BB_1}$ povučemo sferne normale, koje su takođe lukovi velikih krugova, te sferne normale će se sjeći u tački P na površini sfere. Sferni trouglovi ABP i A_1B_1P su podudarni, jer su im sfrene stranice jednake. Na taj način pomjeranje tijela može se izvršiti jednim obrtanjem tijela oko ose OP i ta osa se naziva osa konačnog obrtanja (osa ekvivalentnog obrtanja), a ugao $APA_1=\Delta\alpha$ naziva se ugao konačnog obrtanja.

Ojler-Dalamberova teorema predstavlja geometrijsku interpretaciju obrtanja krutog tijela oko nepokretne tačke, a stvarno prevođenje tijela iz položaja koji odgovara trenutku t u položaj koji odgovara trenutku $t_1=t+\Delta t$ jednim obrtanjem oko ose konačnog obrtanja za ugao $\Delta\alpha$ uopšte ne predstavlja stvarno pomjeranje tijela. Ukoliko su manji intervali vremena Δt utoliko će pomjeranje tijela biti bliže stvarnom pomjeranju. Položaj ose OP zavisi od početnog i konačnog položaja tijela.

Naime, interval vremena Δt možemo podjeliti na veliki broj malih podinetrvala Δt_1, Δt_2, Δt_3,... Svakom od tih malih podintervala odgovara neki početni i konačni položaj tijela, tako da je konačni položaj iz prethodnog podintervala vremena ujedno početni položaj za naredni podinterval vremena. Svakom podintervalu odgovara po jedna osa konačne (ekvivalentne) rotacije, pomoću koje se sferno kretanje tijela u tom podintervalu može prikazati kao obrtanje oko nepokretne ose. Dok sve tačke na osi konačne rotacije miruju, ostale tačke tijela opisuju dijelove kružnih lukova sa centrima na toj osi, u ravnima normalnim na osu. Ako se sferno kretanje prikazuje kao niz uzastopnih obrtanja oko skupa osa konačnih (ekvivalentnih) rotacija u malim konačnim podintervalima vremena Δt_1, Δt_2, Δt_3,..., tada se ovakvim opisom pruža približna predstava o kretanju tijela.

Međutim, kada pustimo da svaki od podintervala vremena kretanja tijela teži ka nuli, tada u svakom infinitezimalnom podintervalu *dt* tijelo vrši elementarno sferno kretanje obrćući se oko tzv. trenutne ose obrtanja. Drugim riječima, kada se pređe na granični slučaj, kada $\Delta t \to 0$, lukovi AB i A_1B_1 su veoma bliski jedan drugom i tada osa konačnog obrtanja mijenja svoj položaj težeći graničnom položaju, u kojem se naziva trenutna osa obrtanja za dati trenutak vremena t. Trenutna obrtna osa predstavlja geometrijsko mjesto tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke čije su brzine u datom trenutku vremena jednake nuli.

Sve tačke tijela na trenutnoj obrtnoj osi miruju, a ostale tačke tijela opisuju elementarne dijelove kružnih lukova u ravnima normalnim na osu, čiji su centir na trenutnoj osi.

TRENUTNA UGAONA BRZINA I TRENUTNO UGAONO UBRZANJE TIJELA KOJE SE OBRĆE OKO NEPOKRETNE TAČKE

Srednja ugaona brzina tijela može se izraziti kao količnik ugla $\Delta\alpha$ za koji se tijelo obrne oko trenutne obrtne ose OP i odgovarajućeg intervala vremena

$$\omega_{sr}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

a intenzitet vektore trenutne ugaone brzine ω jednak je graničnoj vrijednosti kojoj teži srednja ugaona brzina kada pustimo da interval vremena teži nuli

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} .$$

Vektor $\vec{\omega}$ trenutne ugaone brzine usmjeren je duž trenutne obrtne ose OP.

Međutim, ugaona brzina ω ne može se odrediti izvodom nekog ugla po vremenu, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \neq \frac{d\alpha}{dt}$$

jer pri obrtnju krutog tijela oko nepokretne tačke ne postoji takav ugao, već se položaj tijela određuje sa tri nezavisna obrtanja (Ojlerovi uglovi).

Trenutna obrtna osa tokom kretanja tijela mijenja svoj položaj, ali stalno prolazi kroz nepokretnu tačku O.

Ako duž trenutne obrtne ose OP uvedemo jedinični vektor $\vec{\omega}_0$ onda se vektor $\vec{\omega}$ može napisati kao

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0 .$$

Vektor $\vec{\omega}$ trenutne ugaone brzine mijenja se tokom vremena po intenzitetu i po poravcu, tako da se i vektor $\vec{\varepsilon}$ trenutnog ugaonog ubrzanja, određen prvim izvodom po vremenu vektora trenutne ugaone brzine, takođe mijenja tokom vremena po intenzitetu i pravcu i ne poklapa se sa pravcem vektora trenutne ugaone brzine.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega \vec{\omega}_0\right) = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 + \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 .$$

Komponenta trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}_1 = \dfrac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0$ karakteriše promjenu intenziteta vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ i ima pravac trenutne obrtne ose , a početak vektora nalazi se u nepokretnoj tački O.

Komponenta trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}_2 = \omega \dfrac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \omega\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0\right) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$ karakteriše promjenu pravca vektora trenutne ugaone brzine . Pravac vektora $\vec{\varepsilon}_2$ upravan je na ravan vektora $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_0$, gdje je sa $\vec{\omega}_1$ označena ugaona brzina obrtanja vektora $\vec{\omega}$. Početak vektora $\vec{\varepsilon}_2$ nalazi se takođe u nepokretnoj tački O.

Trenutna ugaona brzina $\vec{\omega}$ je zajednička kinematička karakteristika za sve tačke tijela koje se obrće oko nepokretne tačke.

OJLEROVE KINEMATIČKE JEDNAČINE

S obzirom da se obrtanje tijela oko nepokretne tačke sastoji iz tri nezavisna obrtanja, može se trenutna ugaona brzina odrediti polazeći od konačnih jednačina kretanja krutog tijela oko nepokretne tačke, tj. iz Ojlerovih uglova.

Srednje ugaone brzine oko odgovrajućih osa određene su sa $\dfrac{\Delta\psi}{dt}, \dfrac{\Delta\theta}{dt}, \dfrac{\Delta\varphi}{dt}$, a granične vrijednosti ovih srednjih ugaonih brzina su

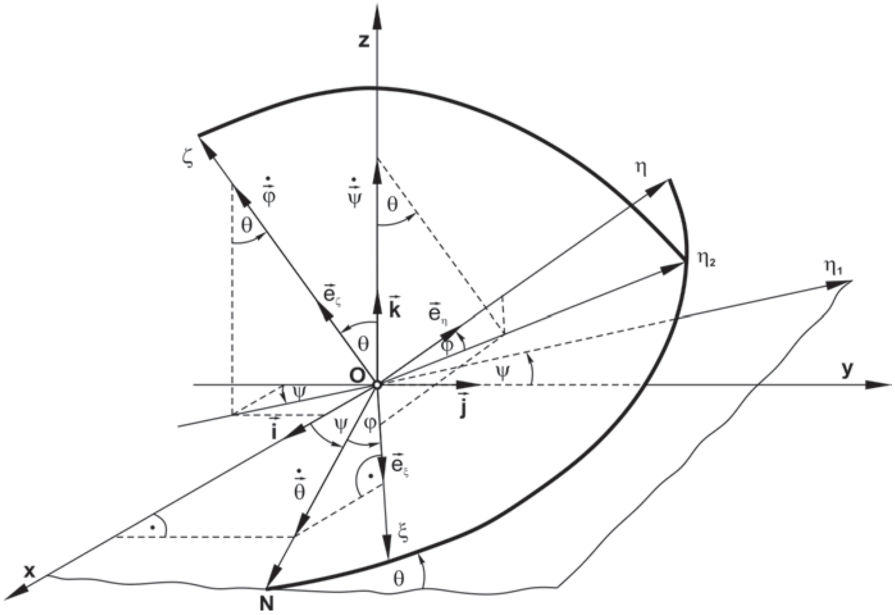
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} \quad - ugaona\ brzina\ precesije$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad - ugaona\ brzina\ nutacije$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad - ugaona\ brzina\ sopstvene\ rotacije$$

Ovi vektori ugaonih brzina usmjereni su duž odgovarajući osa rotacije Oz, ON i Oζ, tako da je vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ tijela koje se obrće oko nepokretne tačke određen vektorskim zbirom komponentnih ugaonih brzina

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}\,.$$



Vektor $\vec{\omega}$ može se projektovati na ose pokretnog i ose nepokretnog koordinatnog sistema. Projekcije vektora $\vec{\omega}$ trenutne ugaone brzine na ose pokretnog koordinatnog sistema i na ose nepokretnog koordinatnog sistema nazivaju se Ojlerove kinematičke jednačine, jer su te projekcije izražene preko Ojlerovih uglova:

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \qquad \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \qquad \omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \qquad \omega_x = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

Intenzitet vektora trenutne ugaone brzine određen je sa

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}$$

Ako su Ojlerovi uglovi poznate funkcije vremena, onda je moguće odrediti u svakom trenutku vremena vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$, a time i položaj trenutne obrtne ose OP, jer je vektor $\vec{\omega}$ usmjeren duž te ose.

BRZINE I UBRZANJA TAČAKA TIJELA KOJE SE OBRĆE OKO NEPOKRETNE TAČKE

Brzina proizvoljne tačke M krutog tijela koje se obrće oko nepokretne tačke određena je primjenom Ojlerove formule

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M$$

gdje je $\vec{r}_M$ vektor položaja tačke M mjeren od nepokretne tačke O.

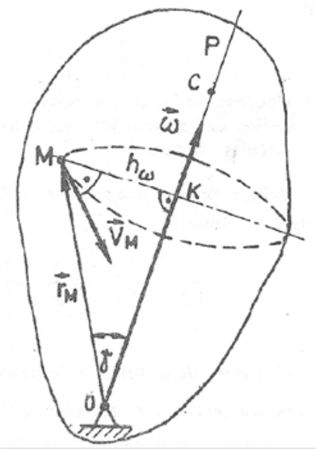
Kako je ugaona brzina $\vec{\omega}$ određena za dati trenutak vremena, tako je i brzina tačke M definisana samo za dati trenutak vremena.

Može se reći: U proizvoljnom trenutku vremena t trenutni raspored brzina tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke jeste takav kao kod tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne ose koja prolazi kroz nepokretnu tačku O, u ovom slučaju oko trenutne obrtne ose OP.

Intenzitet vektora brzine tačke M je

$$\left|\vec{v}_M\right| = \left|\vec{\omega}\times\vec{r}_M\right| = \omega\, r_M \sin\left(\vec{\omega},\vec{r}_M\right) = \omega h_\omega$$

gdje je h_ω normalno rastojanje (najkraće rastojenje) tačke M od trenutne obrtne ose OP.



Vektor brzine tačke M može se napisati u obliku:

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta & \vec{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Ubrzanje proizvoljne tačke M krutog tijela koje se obrće oko nepokretne tačke određeno je kao prvi izvod po vremenu vektora brzine:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} =$$
$$= \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$$

tj. ubrzanje proizvoljne tačke određeno je vektorskim zbirom dviju komponenata.

Prva komponenta ubrzanja naziva se obrtno ubrzanje tačke M i određena je sa:

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} = \left(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2\right)\times\vec{r} = \vec{\varepsilon}_1\times\vec{r} + \vec{\varepsilon}_2\times\vec{r} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0\times\vec{r} + \left(\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}\right)\times\vec{r} = \vec{a}_{\varepsilon 1} + \vec{a}_{\varepsilon 2}.$$

Druga komponenta naziva se aksipetalno ubrzanje tačke M i određena je sa

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right).$$

ODREĐIVANJE POLOŽAJA TRENUTNE OBRTNE OSE

Trenutna obrtna osa OP tokom vremena mijenja svoj položaj u prostoru prolazeći stalno kroz nepokretnu tačku O. Budući da je svaka prava određena položajem dvije tačke, druga tačka trenutne obrtne ose može se odrediti iz svojstva da sve tačke koje leže na trenutnoj obrtnoj osi imaju brzinu jednaku nuli,

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta & \vec{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Ova jednačina biće zadovoljena ukoliko su projekcije brzina na ose pokretnog i ose nepokretnog koordinatnog sistema jednake nuli, a iz ovog uslova slijede jednačine trenutne obrtne ose u odnosu na pokretni sistem referencije Oξηζ i u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz:

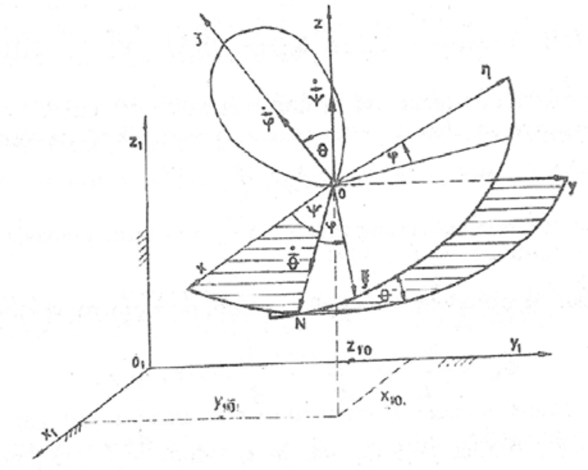
$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}$$

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

OPŠTE KRETANJE SLOBODNOG KRUTOG TIJELA

JEDNAČINE OPŠTEG KRETANJA SLOBODNOG KRUTOG TIJELA

Opšte kretanje slobodnog krutog tijela jeste takvo kretanje pri kome se tijelo može bilo kako pomjerati u prostoru.



Određivanje položaja tijela pri kretanju svodi se na određivanje položaja pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ (koji je čvrsto vezan za pokretno tijelo) u odnosu na nepokretni sistem referencije $Ox_1y_1\,z_1$. Položaj tijela pri kretanju u odnosu na sistem referencije Oxyz (koji je čvrsto vezan za tačku O pokretnog tijela) određen je preko tri Ojlerova ugla ψ, φ i θ, a s obzirom da se i sam pol O kreće, položaj pola O u odnosu na nepokretni sistem referencije određen je sa tri koordinate x_{1O}, y_{1O} i z_{1O}.Na taj način je položaja pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u odnosu na nepokretni sistem referencije $Ox_1y_1z_1$ određen sa šest generalisanih koordinata: x_{1O}, y_{1O}, z_{1O}, ψ, φ i θ.

To znači da slobodno tijelo koje vrši opšte kretanje ima šest stepeni slobode, tj. može da vrši šest nezavisnih kretanja, tri translacije duž osa nepokretnog koordinatnog sistema i tri nezavisne rotacije oko osa koje prolaze kroz pol O, što je određeno Ojlerovim uglovima.

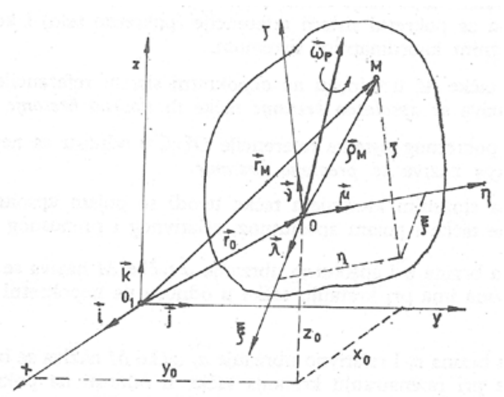
Konačne jednačine opšteg kretanja slobodnog krutog tijela ili zakon opšteg kretanja slobodnog krutog tijela imaju oblik

$$x_{1O}=f_1(t) \qquad y_{1O}=f_2(t) \qquad z_{1O}=f_3(t)$$
$$\psi=f_4(t) \qquad \varphi=f_5(t) \qquad \theta=f_6(t).$$

Prve tri jednačine određuju translaciju pola O zajedno sa sistemom referencije Oxyz, tj. prenosno kretanje krutog tijela koje je određeno vektorom brzine $\vec{v}_O$ i vektorom ubrzanja $\vec{a}_O$.

Posljednje tri jednačine određuju obrtanje krutog tijela oko pola O, tj. relativno kretanje krutog tijela u odnosu na sistem referencije Oxyz.

BRZINE TAČAKA TIJELA KOJE VRŠI OPŠTE KRETANJE



Položaj proizvoljne tačke M u odnosu na nepokretni sistem referencije određen je vektorom položaja

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{\rho}_M$$

gdje je $\vec{r}_O$ vektor položaja pokretnog pola O, a $\vec{\rho}_M$ je vektor položaja tačke M u odnosu na pokretni pol O.

Brzina tačke M određena je sa

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_O + \vec{\rho}_M\right) = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_M$$

Druga komponenta određuje brzinu tačke M tijela pri njegovom obrtanju oko pola O kao nepokretne tačke, tj. $\vec{v}_M^O = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_M$, tako da je brzina tačke krutog tijela pri njegovom opštem kretanju

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_M^O .$$

Brzina proizvoljne tačke M pri opštem kretanju slobodnog krutog tijela jednaka je vektorskom zbiru translatorne brzine $\vec{v}_O$ pokretnog pola O i obrtne brzine $\vec{v}_M^O$ koju tačka M ima kada se tijelo obrće oko pola O kao nepokretne tačke, odnosno oko trenutne obrtne ose koja prolazi kroz pol O.

UBRZANJE TAČAKA TIJELA KOJE VRŠI OPŠTE KRETANJE

Vektor ubrzanja proizvoljne tačke M određen je prvim izvodom po vremenu vektora brzine tačke M:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_O + \vec{v}_M^O\right) = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M\right) = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}_M}{dt}$$

Ovu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \vec{v}_M^O = \vec{a}_O + \vec{a}_M^O .$$

Vektor $\vec{a}_O$ predstavlja translatorno ubrzanje usljed kretanja pola O, dok komponente $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \vec{v}_M^O$ predstavljaju dio ubrzanja tačke M koji nastaje usljed obrtanja tijela oko pola O i koji se naziva obrtno ubrzanje tačke M oko pola O, $\vec{a}_M^O$.

Ubrzanje proizvoljne tačke M pri opštem kretanju slobodnog krutog tijela jednaka je vektorskom zbiru translatornog u brzanja $\vec{a}_O$ pokretnog pola O i obrtnog ubrzanja $\vec{a}_M^O$ koje tačka M ima kada se tijelo obrće oko pola O kao nepokretne tačke, odnosno oko trenutne obrtne ose koja prolazi kroz pol O.

SLOŽENO KRETANJE TAČKE

RELATIVNO, PRENOSNO I APSOLUTNO KRETANJE TAČKE

Neka se tačka M kreće po tijelu za koje je čvrsto vezan sistem referencije Oξηζ i neka se istovremeno tijelo proizvoljno kreće u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz , tj. pokretni sistem referencije Oξηζ kreće se na proizvoljna način u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz.

Kretanje tačke M u odnosu na pokretni sistem referencije Oξηζ (pokretno tijelo) naziva se relativno kretanje tačke.

Kretanje tačke M u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz (nepokretno tijelo) naziva se apsolutno kretanje tačke ili složeno kretanje tačke.

Kretanje pokretnog sistema referencije Oξηζ (pokretno tijelo) u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz (nepokretno tijelo) naziva se prenosno kretanje.

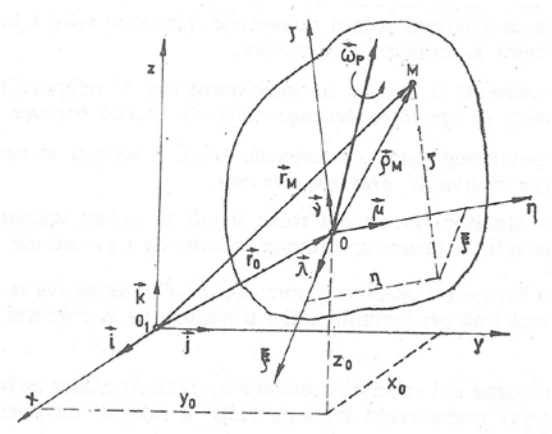
U vezi sa složenim kretanjem tačke uvodi se pojam apsolutne, relativne i prenosne brzine tačke i pojam apsolutnog, relativnog i prenosnog ubrzanja tačke.

Apsolutna brzina $\vec{v}$ i apsolutno ubrzanje $\vec{a}$ tačke M su brzina i ubrzanje koje tačke M ima pri kretanju u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz.

Relativna brzina $\vec{v}_r$ i relativno ubrzanje $\vec{a}_r$ tačke M su brzina i ubrzanje koje tačke M ima pri razmatranjuu kretanja tačke u odnosu na pokretni sistem referencije Oξηζ.

Prenosna brzina $\vec{v}_p$ i prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ tačke M su apsolutna brzina i apsolutno ubrzanje one tačke pokretnog tijela za koje je čvrsto vezan pokretni sistem referencije Oξηζ sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa pokretna tačka M.

APSOLUTNA BRZINA TAČKE



Položaj pokretnog sistema referencije Oξηζ u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz određen je vektorom položaja $\vec{r}_O$ pola O i jediničnim vektorima $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ pokretnih osa.

Položaj tačke M u odnosu na pokretni sistem referencije Oξηζ određen je vektorom položaja

$$\vec{\rho}_M = \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta$$

a ako je vektor položaja tačke M poznata funkcija vremena onda je relativno kretanje tačke poznato.

Položaj tačke M u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz određen je vektorom položaja:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{\rho}_M = \vec{r}_O + \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta$$

pri čemu su promjenljive ne samo veličine $\vec{r}_O$ i ξ, η, ζ, već i jedinični vektori $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ koji mijenjaju pravac prilikom obrtanja pokretnog sistema referencije oko pola O.

Apsolutna brzina tačke M jednaka je prvom izvodu po vremenu vektora položaja $\vec{r}_M$ tačke M:

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_M}{dt}.$$

Pri tome je apsolutni izvod vektora položaja $\vec{\rho}_M$ određen izrazom:

$$\frac{d\vec{\rho}_M}{dt}=\frac{d\xi}{dt}\vec{e}_\xi+\frac{d\eta}{dt}\vec{e}_\eta+\frac{d\zeta}{dt}\vec{e}_\zeta+\xi\frac{d\vec{e}_\xi}{dt}+\eta\frac{d\vec{e}_\eta}{dt}+\zeta\frac{\vec{e}_\zeta}{dt}$$

Uzimajući u obzir da su izvodi jediničnih vektora pokretnih osa određeni relacijama

$$\frac{d\vec{e}_\xi}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}_\xi \quad \frac{d\vec{e}_\eta}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}_\eta \quad \frac{d\vec{e}_\zeta}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}_\zeta$$

to se apsolutni izvod vektora $\vec{\rho}_M$ može napisati u obliku

$$\frac{d\vec{\rho}_M}{dt}=\frac{d\xi}{dt}\vec{e}_\xi+\frac{d\eta}{dt}\vec{e}_\eta+\frac{d\zeta}{dt}\vec{e}_\zeta+\vec{\omega}\times\xi\vec{e}_\xi+\vec{\omega}\times\eta\vec{e}_\eta+\vec{\omega}\times\zeta\vec{e}_\zeta=$$

$$=\frac{d_r\vec{\rho}_M}{dt}+\vec{\omega}\times\left(\xi\vec{e}_\xi+\eta\vec{e}_\eta+\zeta\vec{v}\right)\vec{e}_\zeta=\vec{v}_r+\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}_M$$

U prethodnoj jednačini je sa $\vec{\omega}=\vec{\omega}_p$ označena trenutna ugaona brzina prenosnog kretanja pokretnog sistema referencije Oξηζ (pokretnog tijela), dok je sa $\frac{d_r\vec{\rho}_M}{dt}$ označen relativni izvod vektora položaja , koji određuje vektor relativne brzine $\vec{v}_r$.

<u>Relativna brzina tačke</u>

$$\vec{v}_r=\frac{d_r\vec{\rho}_M}{dt}=\frac{d\xi}{dt}\vec{e}_\xi+\frac{d\eta}{dt}\vec{e}_\eta+\frac{d\zeta}{dt}\vec{e}_\zeta ,$$

predstavlja brzinu tačke M pod pretpostavkom da se mijenjaju samo relativne koordinate ξ,η,ζ dok ostali vektori ostaju konstantni, tj. pretpostavlja se da pokretni sistem referencije uslovno miruje.

Apsolutna brzina tačke M je:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}_M}{dt}=\frac{d\vec{r}_O}{dt}+\frac{d\vec{\rho}_M}{dt}=\vec{v}_O+\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}_M+\vec{v}_r$$

Ako zamislimo da je tačka M čvrsto vezana za pokretno tijelo (pokretni sistem referencije), onda je njena relativna brzina jednaka nuli, $\vec{v}_r=0$, pa iz prethodnog izraza definišemo <u>prenosnu brzinu tačke M</u>

$$\vec{v}_p=\vec{v}_O+\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}_M .$$

Prenosna brzina tačke M predstavlja brzinu tačke M pod pretpostavkom da tačka M ne vrši relativno kretanje u odnosu na pokretno tijelo (pokretni sistem referencije), već je tačka čvrsto vezana za pokretno tijelo i kreće se zajedno sa njim u odnosu na nepokretni sistem referencije.

S obzirom da tijelo vrši opšte kretanje u prostoru, to je brzina bilo koje njegove tačke (u ovom slučaju prenosna brzina tačke M) određena vektorskim zbirom brzine $\vec{v}_O$ pola O i obrtne brzine $\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}_M$ usljed obrtanja pokretnog tijela oko pola O.

<u>Konačno, apsolutna brzina tačke pri njenom složenom kretanju je:</u>

$$\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{v}_r$$

<u>tj. apsolutna brzina tačke M jednaka je vektorskom zbiru prenosne i relativne brzine tačke.</u>

Ako pokretno tijelo vrši ravno kretanje, tj. prenosno kretanje tačke je ravno kretanje, prenosna brzina se određuje obrascem

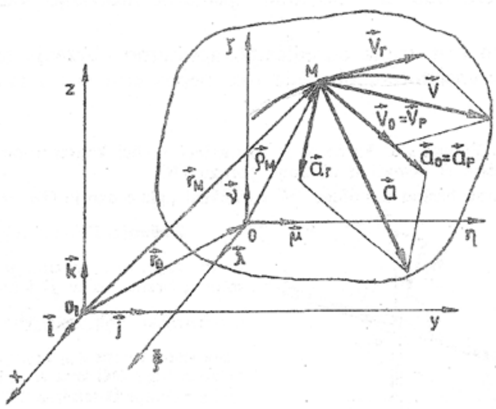
$$\vec{v}_p=\vec{v}_O+\vec{\omega}_{rk}\times\vec{\rho}_M=\vec{v}_O+\vec{v}_M^O .$$

Ako pokretno tijelo vrši obrtanje oko nepokretne ose, odnosno nepokretne tačke, onda je prenosna brzina

$$\vec{v}_p=\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}_M .$$

Ako tijelo vrši translatorno kretanje, onda je prenosna brzina $\vec{v}_p=\vec{v}_O$.

APSOLUTNO UBRZANJE TAČKE



Apsolutno ubrzanje tačke M pri složenom kretanju tačke određeno je prvim izvodom po vremenu vektora apsolutne brzine tačke M:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_O + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{v}_r\right) =$$

$$= \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

Apsolutni izvod relativne brzine $\vec{v}_r$ tačke M određen je na isti način kao i apsolutni izvod vektora $\vec{\rho}_M$, tj.

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d_r\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

Relativno ubrzanje tačke M je u prethodnom izrazu

$$\vec{a}_r = \frac{d_r\vec{v}_r}{dt} = \frac{d_r^2\vec{\rho}_M}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\vec{e}_\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\vec{e}_\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\vec{e}_\zeta$$

i ono karakteriše promjenu relativne brzine $\vec{v}_r$ pod pretpostavkom da pokretni sistem referencije miruje.

Apsolutno ubrzanje tačke svodi se na oblik:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} = = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{v}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M\right) + \vec{a}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r =$$

$$= \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M\right) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

pri čemu je $\vec{a}_O$ ubrzanje pola O, a $\vec{\varepsilon}_p$ je vektor trenutnog ugaonog ubrzanja pokretnog tijela (ugaono ubrzanje prenosnog kretanja).

Prenosno ubrzanje tačke M može se odrediti ako zamislimo da tačke M ne vrši relativno kretanje, već je čvrsto vezana za pokretno tijelo, tako da su relativna brzina i relativno ubrzanje jednaki nuli.

Onda je prenosno ubrzanje tačke, kada pokretno tijelo vrši opšte kretanje, određeno sa

$$\vec{a}_p = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M\right) = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_M^O .$$

U izrazu za apsolutno ubrzanje tačke figuriše komponenta $2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$, koja predstavlja Koriolisovo ubrzanje:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r .$$

Konačno, apsolutno ubrzanje tačke određeno je relacijom

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor} .$$

tj. apsolutno ubrzanje tačke pri njenom složenom kretnaju jednako je vektorskom zbiru prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja. Pošto u opštem slučaju vektori prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja nisu međusobno upravni, intenzitet apsolutnog ubrzanja tačke M moguće je odrediti ako se nađu projektcije vektora apsolutnog ubrzanja na tri upravne ose

$$a_x = a_{px} + a_{rx} + a_{corx}$$

$$a_y = a_{py} + a_{ry} + a_{cory}$$

$$a_z = a_{pz} + a_{rz} + a_{corz}$$

pa je tada

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

KONSTRUKCIJA KORIOLISOVOG UBRZANJA

Koriolisovo ubrzanje karakteriše uzajamno dejstvo prenosnog i relativnog kretanja tačke i određeno je sa

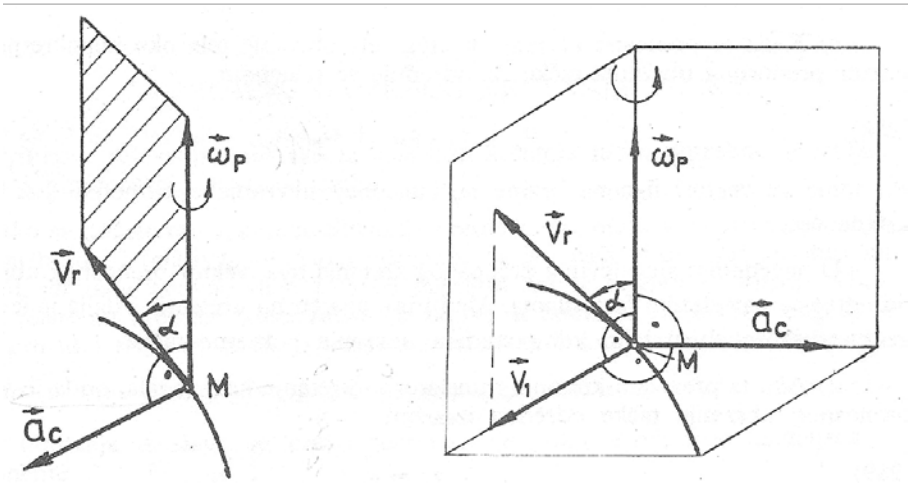
$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

Nazvano je po francuskom naučniku G. Koriolisu (1792-1843).
Intenzitet Koriolisovog ubrzanja određen je sa

$$\left|\vec{a}_{cor}\right| = 2\left|\vec{\omega}_p\right|\left|\vec{v}_r\right|\sin\angle\left(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r\right)$$

Pravac vektora $\vec{a}_{cor}$ upravan je naravan koju obrazuju vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$, a smjer mu je takav da se posmatrano iz vrha vektora $\vec{a}_{cor}$ vidi obrtanje za najmanji ugao od vektora $\vec{\omega}_p$ ka vektoru $\vec{v}_r$ u smjeru suprotnom od obrtanja kazaljke na satu.
Koriolisovo ubrzanje jednako je nuli kada je:

a) Prenosno kretanje translatorno, onda je $\vec{\omega}_p = 0$
b) Kada su vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$ kolinearni
c) U trenucima kada je relativna brzina jednaka nuli $\vec{v}_r = 0$ ili kada je ugaona brzina prenosnog kretanja jednaka nuli $\vec{\omega}_p = 0$.



DINAMIKA

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONI DINAMIKE

Dinamika je dio teorijske mehanike u kome se izučavaju zakoni kretanja meterijalnih tijela pod dejstvom sila.

Dinamiku možemo razdijeliti na:

- Dinamiku materijalne tačke (Ako se dimanzije tijela pri kretanju mogu zanemariti, onda kažemo da je u pitanju materijalna tačka, koja se razlikuje od geometrijske tačke time što ima konačnu masu.)
- Dinamiku sistema materijalnih tačaka i krutog tijela (Pod materijalnim sistemom podrazumijeva se sistem materijalnih tačaka, koje zahvaljujući postojanju veza između tačaka ne mogu da se kreću nezavisno jedna od druge. Ako su mase u nekom dijelu prostora neprekidno raspoređene, tada tačaka ima beskonačno mnogo i sistem obrazuje neprekidnu sredinu, a oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja metrijalno tijelo. Kruto tijelo je ono koje pod dejstvom sila ne mijenja svoj oblik i dimenzije.)

Osnovni zakoni dinamike:

Formulisao ih je Njutn 1687. godine u svom djelu „Matematički osnovi prirodne filozofije" i ti zakoni su nazvani Njutnovi zakoni ili zakoni kretanja. Njutnovi zakoni su objektivni zakoni prirode, ustanovljeni na osnovu opažanja i eksperimenata kako samog Njutna tako i njegovih prethodnika.

Prvi Njutnov zakon-zakon inercije: *Materijalna tačka (tijelo) ostaje u stanju mirovanja ili ravnomjernog pravolinijskog kretanja, dok pod djelovanjem sile ne bude prinuđena da to svoje stanje promjeni*. Ovim se definiše inertnost tijela. Ako se tijelo ne kreće ravnomjerno i pravolinijski, onda se ono nalazi pod dejstvom drugih materijalnih tijela, a ovo dejstvo u mehanici predstavlja silu. Količinska mjera mehaničkog uzajamnog dejstva materijalnih tijela naziva se sila. Ipak, kao mjera mehaničkog kretanja uzima se količina kretanja, tj. proizvod vektora brzine i mase tijela, $\vec{K} = m\vec{v}$. I Njutnov zakon može se iskazati i na ovaj način:

Ako na materijalnu tačku ne djeluje nikakva sila onda je količina kretanja te materijalne tačke konstanta, tj. $\vec{K} = m\vec{v} = const$.

Drugi Njutnov zakon-osnovni zakon dinamike:

a) *Brzina promjene količine kretanja materijalne tačke (tijela) jednaka je po intenzitetu, pravcu i smjeru sili koja dejstvuje na materijalnu tačku (tijelo).*

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F} .$$

Ovaj zakon Njutn je iskazao jednačinom: $m\left(v - v_0\right) = F\left(t - t_0\right)$.

Ojler je dijeljenjem jednačine sa $\left(t - t_0\right)$ i prelaženjem na graničnu vrijednost dobio

$$m \lim \frac{v - v_0}{t - t_0} = ma = F$$

i iskazao II Njutnov zakon u obliku:

b) *Promjena kretanja proporcionalna je sili i vrši se u pravcu sile, tj. intenzitet sile koja dejstvuje na meterijalnu tačku srazmjeran je masi i intenzitetu njenog ubrzanja, dok se pravac i smjer sile i ubrzanja poklapaju*

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F} \quad \text{odnosno} \quad m\vec{a} = \vec{F} .$$

Ova jednačina je na snazi samo u odnosu na inercijalni sistem referencije, tj. koordinatni sistem koji je nepokretan ili se pomjera translatorno konstantnom brzinom (koordinatni početak vrši jednoliko pravolinijsko kretanje).

Treći Njutnov zakon-zakon dejstva i protivdejstva (zakon o jednakosti akcije i reakcije): *Dejstvu (akciji) uvijek je jednako protivdejstvo (reakcija), ili dva tijela dejstvuju jedno na drugu silama istih intenziteta i pravaca a suprotnih smjerova.*

Pored ovih osnovnih zakona, u dinamici se koristi i sve što je o pojmu sile uvedeno u statici (npr. paralelogram sila, princip veza, oslobađanje od veza).

DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE (KINETIKA MATERIJALNE TAČKE)

Pod materijalnom tačkom podrazumijevamo materijalno tijelo određene konačne mase a malih dimenzija, tako da se može smatrati da je cjelokupna masa koncentrisana u jednoj geometrijskoj tački.

Problemi koje rješava dinamika mogu se podijeliti na dva osnovna pitanja:

- Kolike sile dejstvuju na tačku ako je poznato njeno kretanje? Rješenje ovog pitanja proizilazi direktno iz II Njutnovog zakona, tj. ako je poznat zakon kretanja meterijalne tačke, treba odrediti sile koje proizvode to kretanje.
- Kakvo je kretanje tačke ako su poznate sile koje dejstvuju na tačku? Ovaj zadatak rješava se integraljenjem diferencijalnih jednačina kretanja, tj. ako su poznate sile koje dejstvuju na metrijalnu tačku, kretanje tačke se odredi integraljenjem diferencijalnih jednačina kretanja. U tehnici uglavnom rješavamo ovo drugo pitanje, koje se naziva i osnovni zadatak dinamike.

Zadatak dinamike tačke je postavljanje diferencijalnih jednačina kretanja i njihovo integraljenje. Diferencijalne jednačine kretanja materijale tačke izvode se iz osnovnog zakona dinamke - II Njutnovog zakona.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA SLOBODNE MATERIJALNE TAČKE

Posmatramo kretanje slobodne materijalne tačke M mase m, na koju dejstvuje sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Ako je položaj materijalne tačke M u odnosu na inercijalni sistem referencije određen vektorom položaja $\vec{r}$ onda drugi zakon dinamike glasi

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \text{odnosno} \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right).$$

Sila F, odnosno sile F_i , u opštem slučaju, zavisi od položaja tačke, njene brzine i vremena.

Ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja tačke u vektorskom obliku.

Jednačinu je moguće projektovati na ose utvrđenog sistema referencije i tada se dobijaju razni oblici skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja materijalne tačke.

a) Dekartov koordinatni sistem

$$m\ddot{x} = X\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right), \quad m\ddot{y} = Y\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right), \quad m\ddot{z} = Z\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right)$$

U ovim jednačinama su $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ projekcije vektora ubrzanja $\vec{a}$ tačke na ose Dekartovog sistema referencije, a X, Y, Z su projekcije rezultujuće sile $\vec{F}$ koja dejstvuje na tačku na ose Dekartovog sistema referencije *Oxyz.*

b) Polarne koordinate

$$ma_r = F_r\ ; \quad ma_\varphi = F_\varphi, \quad \text{odnosno}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} F_{ir}\ ; \quad m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = \sum_{i=1}^{n} F_{i\varphi}$$

c) Prirodne koordinate

$$ma_t = F_t\ ; ma_n = F_n\ ; ma_b = F_b\ .$$

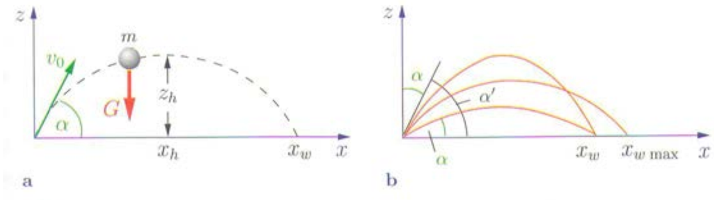
Za $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$; $a_n = \dfrac{v^2}{R_k} = \dfrac{\dot{s}^2}{R_k}$; $a_b = 0$, imamo $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = F_t$; $m\dfrac{v^2}{R_k} = F_n$; $0 = F_b$.

Primjer: Kosi hitac

Odrediti zakon kretanja materijalne tačke mase m kojoj je u početnom trenutku $t_0 = 0$ saopštena početna brzina $\vec{v}_0$ pod uglom α u odnosu na horizontalu. Zanemariti otpor vazduha pri kretanju tačke.

Rješenje:

1. Usvajamo Dekartov koordinatni sistem i početak sistema postavljamo u početni položaj tačke. Tačka se kreće u ravnini xOz, tako da prikazujemo koordinatni sistem u ovoj ravni.
2. Crtamo materijalnu tačku u proizvoljnom položaju na putanji i prikazujemo sile koje dejstvuju na tačku tokom kretanja. U ovom slučaju na materijalnu tačku dejstvuje samo sila teže $\vec{G}$.



3. Polazeći od II Njutnovog zakona $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, pišemo vektorsku jednačinu

$$m\vec{a} = \vec{G}$$

I projektujemo je na koordinatne ose, čim dobijamo diferencijalne jednačine kretanja tačke

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{z} = -G = -mg \qquad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -g$$

4. Integraljenjem ovih jednačina dva puta dobijemo opšta rješenja u kojim figurišu integracione konstante

$$\dot{x} = C_1 \qquad x = C_1 t + C_2$$
$$\dot{z} = -gt + C_3 \qquad z = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$$

5. Integracione konstante odredimo iz početnih uslova kretanja, tj. položaja tačke $(x_0 = 0, z_0 = 0)$ i brzine tačke $(\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha,\, \dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha)$ u početnom trenutku $t_0 = 0$. Uvrštavanjem ovih početnih uslova u opšta rješenja definišemo vrijednost integracionih konstanti:

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0 \cos\alpha$$
$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$
$$\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad C_3 = v_0 \sin\alpha$$
$$z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

6. Sada izračunate konstante uvrstimo u opšta rješenja diferencijalnih jednačine kretanja tačke i dobijemo jednačine koje predstavljaju zakon brzine materijalne tačke i zakon kretanja materijalne tačke:

Zakon brzine tačke: $\dot{x} = v_0 \cos\alpha \qquad \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha$

Zakon kretanja tačke: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t$

7. Eliminacijom vremena t iz zakona kretanja određujemo jednačinu putanje tačke:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \cdot tg\alpha$$

Očigledno da je putanja tačke parabola.

8. Domet tačke jeste koordinata x_D onog položaja „D“ na horizontalnoj ravni gdje će pokretna tačka pasti po završenom slobodnom kretanju. Odredimo ga iz uslova da je koordinata $z_D = 0$. Ako stavimo u zakonu kretanja da je $z_D = 0$ onda možemo odrediti trenutak vremena t_D kojem

odgovara ova vrijednost koordinate z. To je vrijeme koje je potrebno tački da pređe putanju od početnog položaja do konačnog položaja kada udara u horizontalnu podlogu, tj. ukupno vrijeme leta tačke iznosi

$$t_D = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Domet tačke je :

$$x_D = x(t_D) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Kako je $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, proizilazi da se za jednu početnu brzinu i dvije vrijednosti ugla $\alpha \left(\alpha, \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ dobije isti domet (položeni i strmi kosi hitac). Maksimalni domet imamo za $\alpha = 45^0$ i iznosi $x_{D\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

9. Maksimalna visina hica, tj. maksimalna visina penjanja materijalne tačke odgovrara položaju tjemena parabole. Odredi se iz uslova da je tangenta na putanju tačke u tjemenu parabole horizontalna, tj. paralelna osi x. Kako je vektor brzine tačke određen pravcem tangente na putanju, to znači da materijalna tačke u najvišem položaju na putanji ima samo horizontalnu komponentu brzine, tj. $\vec{v} = \vec{v}_x$, dok je $v_z = \dot{z} = 0$. Upravo iz ovog uslova, $v_z = \dot{z} = 0$, odredimo trenutak vremena $t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ u kojem se pokretna tačka nalazi u tjemenu parabole.

   Maksimalna visina hica je :

$$z_h = z(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

   Zbog simetričnosti putanje tačke je $x_h = \frac{x_D}{2}$. Visina kosog hica zavisi samo od z komponente početne brzine, tj. $\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha$.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA NESLOBODNE (VEZANE) MATERIJALNE TAČKE (DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRINUDNOG KRETANJA MATERIJALNE TAČKE)

Materijalna tačka je neslobodna ako se njeno kretanje pod dejstvom aktivnih sila vrši po određenoj liniji, površi ili dijelu prostora, a kretanje ovakve tačke naziva se neslobodno kretanje ili kretanje po vezi. Jednačina date površi ili linije po kojoj je tačka prinuđena da se kreće naziva se jednačina veze.Za vrijeme za koje se tačka pri kretanju nalazi na vezi, njene koordinate moraju zadovoljiti jednačine veze.

JEDNAČINE VEZA. PODJELA VEZA

Ukoliko se tačka kreće po nekoj površi, onda je jednačina veze jednačina te površi: $f(x, y, z) = 0$.

Ukoliko se tačka kreće po nekoj liniji, koja je određena presjekom dvaju površi, onda su jednačine veze određene jednačinama tih površi: $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$.

Ako se veze ne mijenjaju tokom vremena, nazivaju se skleronomne (stacionarne), a ako zavise od vremena, $f(x, y, z, t) = 0$, onda su reonomne (nestacionarne).

Ako veza ograničava samo slobodu kretanja tačke u prostoru, a ne ograničava intenzitet njene brzine, tada jednačina veze ne zavisi od brzine i veza se naziva holonomna (geometrijska), a ako veza ograničava i slobodu kretanja tačke u prostoru i intenzitet njene brzine, tada jednačina veze zavisi od brzine tačke i veza se naziva neholonomna (neintegrabilna).

Veze su <u>zadržavajuće</u> ili obostrane ako se za svo vrijeme kretanja tačka nalazi pod dejstvom veze, tj. ostaje stalno na nepokretnoj površi ili liniji, odnosno veze su <u>nezadržavajuće</u> ili jednostrane ako sprečavaju pomjeranje tačke u nekom pravcu, ali dozvoljavaju pomjeranje u suprotnom pravcu.

Veze kod kojih zanemarujemo trenje, tj. koje smatramo idealno glatkim, nazivaju se <u>idealne</u> veze, dok su veze kod kojih ne zanemarujemo trenje <u>realne</u> veze.

Proučavanje kretanje neslobodne tačke može se izvršiti na isti način kao i slobodne tačke, ako se veza odstrani a njen uticaj zamjeni odgovarajućom rekacijom veze.
Pri razmatranju neslobodnog kretanja tačke potrebno je dejstvo veza (materijalnih tijela) na materijalnu tačku zamjenti reakcijama veza i onda razmatrati tačku kao slobodnu na koju osim aktivnih sila dejstvuju i rekacije veza (princip oslobađanja od veza).

Ako sa $\vec{F}$ označimo rezultantu aktivnih sila, a sa $\vec{R}$ rezultantu svih reakcija veza, onda <u>osnovna jednačina dinamike za neslobodnu tačku glasi</u>

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} .$$

KRETANJE TAČKE PO GLATKOJ NEPOKRETNOJ POVRŠI. LAGRANŽEVE JEDNAČINE PRVE VRSTE

Neka se tačka kreće po nepokretnoj glatkoj površi, pri čemu je veza holonomna. Koordinate tačke moraju zadovoljiti jednačinu veze (površi) $f\left(x, y, z\right) = 0$. Kako je veza idealna, reakcija veze $\vec{N}$ je usmjerena po pravcu normale na površ. Poznato je da je gradijent skalarne funkcije $f\left(x, y, z\right)$ vektor koji je takođe usmjeren po normali u datoj tački na uočenoj površi

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \ .$$

Koristeći se uslovom kolinearnosti vektora $\vec{N}$ i *grad f*, može se napisati da je

$$\vec{N} = \lambda grad\ f\ , \quad \text{tj.} \quad N_x\vec{i} + N_y\vec{j} + N_z\vec{k} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

gdje je λ-Lagranžev množitelj veza.

Projektujući osnovnu jednačinu neslobodnog kretanja tačke $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$ na ose nepokretnog Dekartovog sistema referencije, dobija se

$$m\ddot{x} = X + N_x = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = Y + N_y = Y + +\lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = Z + N_z = Z + +\lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

Ove jednačine nazivaju se <u>Lagranževe jednačine prve vrste</u>.

PRINUDNO KRETANJE MATERIJALNE TAČKE PO KRIVOJ. OJLEROVE JEDNAČINE

Pri kretanju neslobodne materijalne tačke po nepokretnoj glatkoj liniji diferencijalnu jednačinu kretanja

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \vec{N}$$

možemo projektovati na ose prirodnog trijedra, tj. pravac tangente, normale i binormale

$$ma_t = m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{it}$$

$$ma_n = m\frac{v^2}{R_k} = \sum_{i=1}^{n} F_{in} + N_n$$

$$ma_b = 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{ib} + N_b$$

Ove jednaćine nazivaju se Ojlerove jednačine kretanja tačke po nepokretnoj krivoj. Reakcija idealne veze razložena je na komponente u pravcu normale i u pravcu binormale

$$\vec{N} = \vec{N}_n + \vec{N}_b .$$

Ako se materijalna tačka kreće po nepokretnoj hrapavoj krivoj, reakcija veze $\vec{R}$ razlaže se na normalnu komponentu $\vec{N}$ i tangentnu komponentu $\vec{F}_\mu$ koja predstavlja silu trenja klizanja. Diferencijalne jednačine kretanja neslobodne materijalne tačke po hrapavoj liniji u prirodnim koordinatama imaju oblik

$$ma_t = m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{it} - F_\mu$$

$$ma_n = m\frac{v^2}{R_k} = \sum_{i=1}^{n} F_{in} + N_n$$

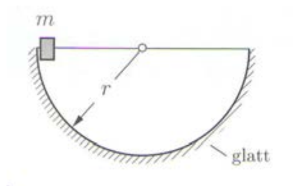
$$ma_b = 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{ib} + N_b$$

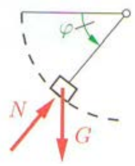
Sila trenja klizanja određena je izrazom $F_\mu = \mu N = \mu\sqrt{N_n^2 + N_b^2}$.

Primjer: Posmatrajmo kretanje materijalne tačke M, mase m, po glatkoj kružnoj podlozi poluprečnika r.

Neka tačka M započinje kretanje bez početne brzine iz prikazanog položaja. Pošto se tačka kreće u ravni po zadatoj vezi (kružnici), to ona ima jedan stepen slobode kretanja (s=2·1-1=1), a kao koordinatu koja definiše položaj tačke tokom kretanja možemo uzeti ugao φ.

Trebamo nacrtati tačku M u nekom proizvoljnom položaju na vezi i primijeniti princip oslobađanja od veza, tako da su sile koje dejstvuju na tačku težina $\vec{G}$ (spoljašnja sila) i rekacija veze $\vec{N}$ (u ovom slučaju veza je glatka pa je reakcija usmjerena po pravcu normale na vezu u datom položaju tačke).





Polazeći od II Njutnovog zakona, kretanje tačke opisujemo diferencijalnim jednačinama u prirodnim koordinatama:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} ma_n &= \sum F_{in} + N_n \\ ma_t &= \sum F_{it} \end{aligned}$$

S obziron na da normalno i tangencijalno ubrzanje možemo iskazati u funkciji ugla φ, diferencijalne jednačine kretanja tačke su:

projekcija na pravac normale (n) : $mr\dot{\varphi}^2 = N - G\sin\varphi$

projekcija na pravac tangente (t) : $mr\ddot{\varphi} = G\cos\varphi$.

Nepoznate u ovim jednačinama su N i φ. Reakciju veze N ćemo odrediti iz prve jednačine (projekcije na pravac normale) , ali zato moramo poznavati promjenu brzine $\dot{\varphi}$ u funkciji položaja tačke, tj. ugla φ. Iz druge jednačine (projekcije na pravac tangente) možemo odrediti tu zavisnost, ako napišemo da je:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi},$$

pa je: $mr\dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = mg\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \dfrac{g}{r}\cos\varphi d\varphi$, čim su razdvojene promjenljive u jednačini.

Integraljenjem jednačine, uz početne uslove kretanja $\varphi_0 = 0$ i $\dot{\varphi}_0 = 0$ (iz $v_0 = r\dot{\varphi}_0 = 0$), proizilazi

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\sin\varphi, \quad \text{tj.} \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{r}\sin\varphi}\ .$$

Iz poznate ugaone brzine $\dot{\varphi}$, znamo kolika je brzina tačke M, iskazana u funkciji položaja tačke, φ :

$$v = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr\sin\varphi}\ .$$

Najveća brzina tačke je za $\sin\varphi = 1$ i iznosi $v_{\max} = \sqrt{2gr}$, a očigledno je da $\sin\varphi = 1$ odgovara najnižem položaju tačke m na putanji gdje je $\varphi = 90^o$.

Rekaciju veze N sada možemo odrediti iz projekcije na pravac normale, uvrštavanjem $\dot{\varphi}^2$:

$$N = mr2\frac{g}{r}\sin\varphi + mg\sin\varphi = 3mg\sin\varphi$$

U najnižem položaju tačke na putanji, za $\varphi = 90^o$, imamo maksimalnu vrijednost reakcije veze

$$N_{\max} = 3mg = 3G\ .$$

U ovom zadatku odredili smo reakciju veze N, a tačka dejstvuje na vezu silom pritiska koja ima isti intenzitet i pravac kao ova reakcija, samo suprotan smjer.

SILE OTPORA

Sile otpora su u tehnici ponekad vrlo značajne i treba ih uključiti u jednačine kretanja tačke. Ove sile mogu zavisiti od kretanja tačke. Sile otpora su tangencijalne na putanju tačke i imaju suprotan smjer od smjera kretanja, npr. sila trenja klizanja između dva tijela u dodiru ili sila otpora vazduha.

Kod kretanja krutih tijela u tečnostima i gasovima pojavljuju se takođe otpori kretanja koji se mogu odrediti eksperimentalno. Pokazaćemo dva idealizovana primjera.

a) Ako su brzine kretanja male onda kažemo da je strujanje fluida laminarno, a sila otpora sredine u tom slučaju je proporcionalna prvom stepenu brzine : $F_w = kv$.

   Faktor proporcionalnosti k zavisi od geometrije tijela oko kojeg struji fluid i dinamičke viskoznosti fluida η. Džordž Gabrijel Stoks (1819-1903) je 1854. god. odredio zakon za silu otpora kugle poluprečnika r oko koje struji tečnost brzine v: $F_w = 6\pi\,\eta\, r\, v$.

b) Ako su brzine strujanja veće onda je strujanje turbulentno. Kod turbulentnog strujanja približna sila otpora je proporcionalna drugom stepenu brzine: $F_w = kv^2$.

   Faktor proporcionalnosti k ovdje zavisi od geometrije tijela i gustine fluida ρ koji struji oko tijela.

   Često se sila otpora kod turbulentnog strujanja oko tijela piše u obliku: $F_w = c_w \dfrac{\rho}{2} A_s v^2$. Ovdje je A_s projekcija tijela na ravan koja je okomita na smjer strujanja, a c_w jeste bezdimenzionalna značica strujanja, koja uključuje više značaja strujanja. Npr. kod modernih automobila c_w je manja od 0,3.

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE MATERIJALNE TAČKE

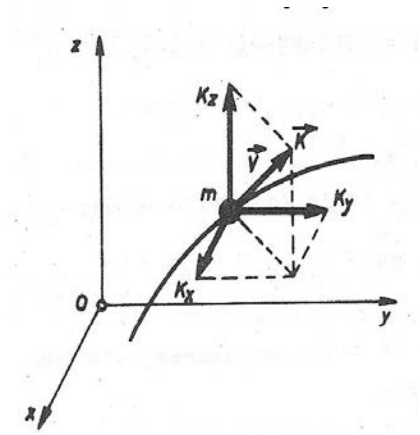
Da bi se izučavanje kretanja materijalne tačke pojednostavilo i da bi se u pojedinim tehničkim problemima odredile samo određene veličine, kao npr. brzina u određenom položaju ili brzina u određenom vremenskom intervalu, a da se pri tome problem kretanja ne proučava u cjelini, izvedeni su opšti zakoni dinamike tačke. Njihovom primjenom izbjegava se integraljenje diferencijalnih jednačina kretanja.

Opšti zakoni povezuju osnovne dinamičke veličine koje karakterišu kretanje (kinetičku energiju, količinu kretanja, moment količine kretanja) sa veličinama koje karakterišu djelovanje sila (rad sile, impuls sile, moment sile).

Opšti zakoni dinamike materijalne tačke su:

- Zakon o promjeni količine kretanja,
- Zakon o promjeni momenata količine kretanja,
- Zakon o promjeni kinetičke energije materijalne tačke.

KOLIČINA KRETANJA. ZAKON KOLIČINE KRETANJA (ZAKON IMPULSA)



Količina kretanja materijalne tačke $\vec{K}$ je vektorska veličina koja predstavlja proizvod mase tačke i vektora brzine tačke, $\vec{K} = m\vec{v}$.

Ovaj vektor je kolinearan sa vektorom brzine i ima isti smjer. Može se razložiti na komponente u pravcu koordinatnih osa referentnog koordinatnog sistema. Jedinica količine kretanja je [$kgms^{-1}$] ili [Ns].

Impuls sile. Najprije definišimo elementarni impuls sile za beskonačno mali interval vremena. To je vektorska veličina $d\vec{I} = \vec{F}dt$, gdje je dt elementarni vremenski interval. Ovaj vektor je kolinearan sa vektorom sile $\vec{F}$. Sad možemo definisati impuls sile za određeni vremenski interval, npr. $t_0 - t$:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} d\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt \, .$$

Pravac impulsa poklapa se sa pravcem i smjerom sile. Jedinica za impuls sile je [$kgms^{-1}$] ili [Ns]. Moguće je naći projekcije impulsa sile na ose referentnog koordinatnog sistema.

Impuls sile pokazuje efekat dejstva sile u nekom vremenskom intervalu. Da bismo mogli izračunati vrijednost impulsa sile, sila mora biti poznata funkcija vremena ili konstanta.

Impuls rezulatante sistema sile koje dejstvuju na materijalnu tačku u datom vremenskom intervalu, jednak je vektorskom zbiru impulsa komponentnih sila u istom intervalu vremena:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_r dt = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + .. + \vec{F}_n\right) dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_1 dt + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_2 dt + .. + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_n dt = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + .. + \vec{I}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i \, .$$

Zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke

Ako pođemo od osnovne jednačine dinamike $m\vec{a} = \vec{F}$, gdje je $\vec{F}$ rezultanta svih sila koje dejstvuju na tačku, imamo:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \, ,$$

pri $m = const$ imamo: $\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F}$, odnosno $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$.

Ova jednačine iskazuje zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke u diferencijalnom obliku: Izvod vektora količine kretanja tačke po vremenu jednak je rezultujućoj sili koja dejstvuje na tačku.

Sad ćemo uspostaviti vezu između količine kretanja i impulsa sile. Ako pođemo od jednačine

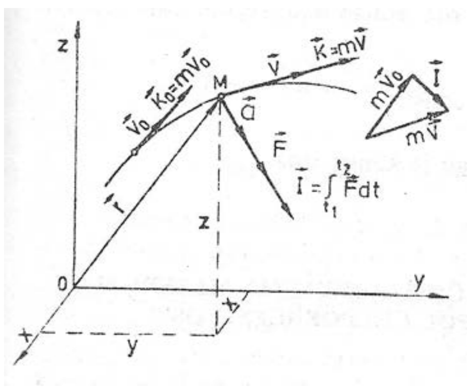
$$d\vec{K} = d\left(m\vec{v}\right) = \vec{F}dt$$

i i ntegralimo je u intervalu vremena $t_0 - t$, dobijamo:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(m\vec{v}\right) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt, \quad \text{odakle je} \quad m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{I}, \text{ odnosno } \vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{I} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i .$$

Ova jednačina iskazuje zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke u konačnom ili tzv.integralnom obliku: Priraštaj vektora količine kretanja tačke za neki konačni vremenski interval jednak vektorskom zbiru impulsa svih sila koje dejstvuje na tačku u tom interval vremena .

Zakon o održanju količine kretanja materijalne tačke



Ako na materijalnu tačku ne dejstvuju sile ili ako dejstvuje takav sistem sila čiji je vektorski zbir jednak nuli $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i = 0$, onda je

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = 0, \quad \text{odakle slijedi da je}$$

$$m\vec{v} = const,$$

odnosno $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = const$, odakle slijedi $\vec{v} = \vec{v}_0 = const$.

Ako je u nekom vremenskom intervalu vektorski zbir impulsa svih sila koje djeluju na tačku jednak nuli, onda je količina kretanja materijalne tačke na kraju tog intervala jednaka količini kretanja na početku intervala, tj. tačka se kreće ravnomjerno pravolinijski , a takvo kretanje naziva se kretanje po inerciji.

MOMENT KOLIČINE KRETANJA. ZAKON MOMENTA KOLIČINE KRETANJA

Iz statike je poznato da je moment sile u odnosu na pol O definisan jednačinom:

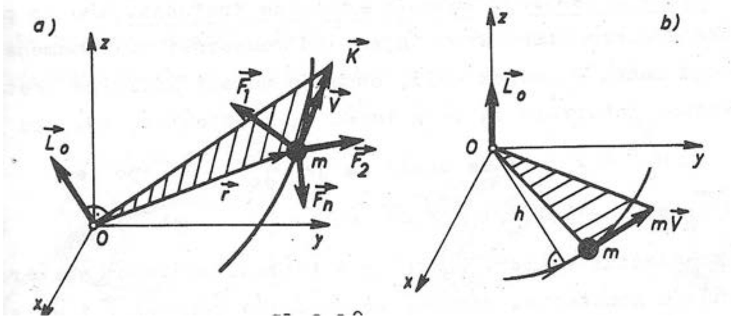
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Analogna veličina u dinamici je moment količine kretanja materijalne tačke (kinetički moment) i predstavlja moment vektora količine kretanja $\vec{K}$ u odnosu na pol (tačku) O:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times \left(m\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja tačke. Očigledno je da se mogu odrediti projekcije vektora momenta količine kretanja u pravcu koordinatnih osa referentnog koordinatnog sistema, koje definišu moment količine kretanja tačke za osu:

$$L_{ox} = L_x = m\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right), L_{oy} = L_y = m\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right), L_{oz} = L_z = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right).$$



Zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke

Možemo uspostaviti zavisnost između momenta količine kretenja tačke i momenta sile.

Ako pođemo od II Njutnovog zakona $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum \vec{F}_i$ i pomnožimo sa vektorom položaja tačke $\vec{r}$ dobijamo

$$\vec{r}\times\left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\sum \vec{r}\times\vec{F}_i=\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}\ .$$

Ukoliko deriviramo po vremenu vektor konetičkog momenta dobijemo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

Pošto su vektori $\vec{v}$ i $m\vec{v}$ kolinearni njihov vektorski proizvod je jednak nuli, pa je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum \vec{r}\times\vec{F}_i=\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}\ .$$

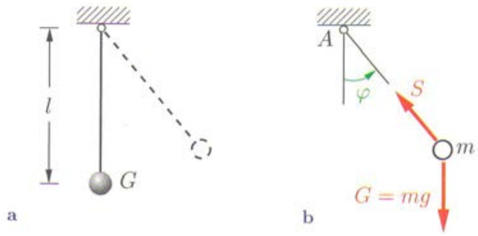
Jednačina izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke: <u>Izvod kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol O po vremenu jednak je vektorskom zbiru momenata sila koje dejstvuju na pokretnu tačku, računatih za isti nepokretni pol.</u>

Vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine:

$$\frac{dL_{Ox}}{dt}=\sum M_{Ox}^{\vec{F}_i},\quad \frac{dL_{Oy}}{dt}=\sum M_{Oy}^{\vec{F}_i},\quad \frac{dL_{Oz}}{dt}=\sum M_{Oz}^{\vec{F}_i}\ .$$

Primjer: Matematičko klatno

Matematičko klatno predstavlja materijalna tačka težine G, obješena u nepokretnoj tački A o neistegljiv konopca dužine l, koja izvodi kretanje u vertikalnoj ravni pod djelovanjem vlastite težine. Proizvoljan položaj tačke određen je uglom φ, a nakon oslobađanja tačke od djelovanja veze, tačka je po dejstvom težine $\vec{G}=m\vec{g}$ i sile u konopcu $\vec{S}$ (reakcija veze).



Kinetički moment tačke u odnosu na tačku vješanja A i moment sila koje dejstvuju na tačku u odnosu na tačku A su:

$$L_A=lmv=lm\left(l\dot{\varphi}\right)=ml^2\dot{\varphi},\qquad M_A=-mg\sin\varphi l$$

Zakon o promjeni kinetičkog momenta za osu koja prolazi kroz tačku A i koje je okomita na ravan kretanja je u ovom slučaju

$$\frac{dL_A}{dt}=M_A\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\right)=-mgl\sin\varphi$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Za male otklone klatna važi aproksimacija $\sin\varphi \approx \varphi$ pa je jednačina kretanja klatna

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 .$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina 2. reda, a kretanje klatna jesu harmonijske oscilacije.

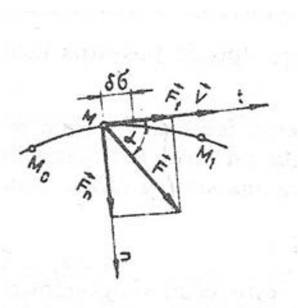
Zakon o održanju momenta količine kretanja materijalne tačke

Ako na materijalnu tačku dejstvuje takav sistem sila da je vektorski zbir momenata tih sila u odnosu na nepokretni pol O jednak nuli, $\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i} = 0$, onda je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0, \quad \text{odakle je} \quad \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = const.$$

Ova jednačina iskazuje zakon o održanju momenta količine kretanja tačke u odnosu na nepokretni pol O. S obzirom da je vektorski proizvod vektora položaja i brzine tačke konstantan, to znači da ovi vektori leže u stalnoj ravni, tj. tačka se kreće u ravni.

RAD SILE. ENERGIJA. ZAKON KINETIČKE ENERGIJE MATERIJALNE TAČKE



Polazeći od Njutnove jednačine $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, njenim projektovanjem na pravac tangente dobijamo:

$$ma_t = m\frac{dv}{dt} = \sum F_i \cos\angle\left(\vec{F}_i, \vec{e}_t\right) = \sum F_{it} ,$$

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \sum F_{it} \quad \Rightarrow \quad mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{it} \quad \Rightarrow \quad mvdv = \sum F_{it}ds \ .$$

Pošto je $m = const$, lijeva strana jednačine se može napisati kao $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, što predstavlja diferencijal kinetičke energije tačke, tj. dE_k. Kinetička energije tačke jednaka je polovini proizvoda mase tačke i kvadrata njene brzine $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Desna strana predstavlja zbir elementarnih radova sila koje dejstvuju na tačku.

Posljednja jednačina sada se može napisati kao:

$$dE_k = \sum dA_i \ .$$

<u>Ova jednačina izražava zakon o promjeni kinetičke energije matreijalne tačke u diferencijalnom obliku: Priraštaj kinetičke energije na elementarnom pomjeranju materijalne tačke jednak je algebarskom zbiru radova svih sila koje dejstvuju na tačku na tom pomjeranju.</u>

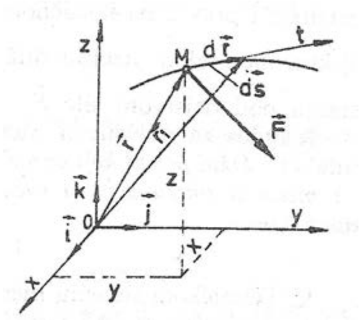
Integraljenjem jednačine između dva konačna različita položaja tačke M_0 i M_1

$$m\int_{v_0}^{v_1} vdv = \sum \int_{M_0}^{M_1} F_i ds \cos\angle\left(\vec{F}_i, \vec{e}_t\right) \qquad \text{dobija se}$$

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{i0,1} \qquad \text{odnosno} \qquad E_{k1}-E_{k0}=\sum A_{i0,1}\,.$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni kinetičke energije matrijalne tačke u konačnom ili integralnom obliku: <u>Promjena kinetičke energije materijalne tačke pri pomjeranju tačke između dva položaja, jednaka je zbiru radova svih sila koje dejstvuju na tačku pri tom pomjeranju</u>.

<u>Rad sile</u>



Neka se materijalna tačka na koju dejstvuje sila pomjera duž putanje s. Ako u beskonačno malom intervalu vremena tačka izvrši elementarno pomjeranje $d\vec{r}$, onda je elementarni rad dA sile $\vec{F}$ na elementarnom pomjeranju $d\vec{r}$ veličina određena skalarnim proizvodom

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Ako vektor sile i vektor elementarnog pomjeranja tačke prikažemo preko njihovih komponenata u pravcu osa dekartovog koordinatnog sistema, onda daobijamo analitički izraz za elemetarni rad sile:

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)=Xdx+Ydy+Zdz\,.$$

Ako je materijalna tačka izvršila konačno pomjeranje po odsječku svoje putanje između tačaka M_1 i M_2, onda je odgovarajući rad sile na pređenom putu

$$A_{M_1,M_2}=\int_{M_1}^{M_2}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right).$$

Da bi se mogao izračunati ovaj integral neophodno je da sila i pomjeranje zavise od jedne iste promjenljive. Najjednostavnije je izračunati rad kada je sila konstantnog intenziteta u toku pomjeranja ili kada zavisi od položaja tačke. Ako sile zavise od vremena ili brzine tačke, onda je neophodno poznavati i zakon kretanja tačke.

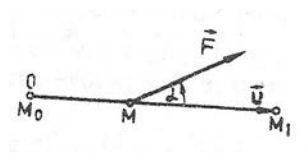
Ako vektor elementarnog pomjeranja iskažemo kao $d\vec{r}=ds\vec{e}_t$, gdje je $\vec{e}_t$ jedinični vektor tangente na putanju tačke u datom položaju, onda je elementarni rad sile

$$dA=\vec{F}\cdot ds\vec{e}_t=Fds\cos\angle\left(\vec{F},\vec{e}_t\right)=F_t ds$$

gdje je F_t projekcija sile na pravac tangnente na putanju u datom položaju. <u>Odavde se vidi da rad na elementarnom pomjeranju *ds* vrši samo tangentna komponenta sile F_t, dok je rad normalne komponente sile jednak nuli</u>, jer je ona upravna na pravac vektora brzine tačke, tj. na vektoru pomjeranja tačke $d\vec{r}=ds\vec{e}_t$. Očigledno je da rad zavisi od sile i pomjeranja, kao i ugla između njih, tako da može biti pozitivan, negativan i jednak nuli. Rad sile na konačnom pomjeranju je

$$A_{M_1,M_2}=\int_{M_1}^{M_2}Fds\cos\angle\left(\vec{F},\vec{e}_t\right).$$

Jedinica za rad sile je džul [J]. Džul je rad koji izvrši sila od 1 N kada se njena napadna tačka pomjeri za 1 m u smjeru dejstva sile, tj. džul je jednak njutnmetru [Nm],odnosno vatsekundi [Ws]. Jedinica za kinetičku energiju je ista kao za rad sile, tj. džul [J].



<u>Pri pravolinijskom pomjeranju tačkeM rad sile $\vec{F}$ konstantnog intenziteta i pravca određen je skalarnim proizvodom vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke te sile:</u>

$$A=\vec{F}\cdot\vec{u}=Fu\cos\angle\left(\vec{F},\vec{u}\right)$$

Ako je ugao α oštar, rad sile je pozitivan, a ako je ugao α tup rad sile je negativan. Kada je $\alpha=90^0$ rad sile je jednak nuli.

Ako na tačku dejstvuje sistem sila konstantnog intenziteta i pravca, onda je rad tih sila na pravolinijskom pomjeranju $\vec{u}$:

$$A=\vec{F}_r\cdot\vec{u}=\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2+..+\vec{F}_n\right)\cdot\vec{u}=\vec{F}_1\cdot\vec{u}+\vec{F}_2\cdot\vec{u}+..+\vec{F}_n\cdot\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\vec{u}$$

$$A=A_1+A_2+...+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

Rad rezultanete sile na konačnom pomjeranju $\vec{u}$ jednak je algebarskom zbiru radova komponentnih sila na tom istom pomjeranju.

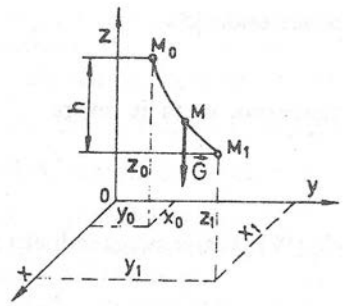
Efekat rada-snaga: pod snagom se podrazumijeva veličina koja karakteriše rad sile u jedinici vremena. Snaga P sile koja dejstvuje u beskonačno malom intervalu vremena dt je

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}$$

Ako se rad tokom vremena t vrši ravnomjerno, onda je snaga $P=\frac{A}{t}$. Jedinica za snagu je vat [W].

Rad sile teže, sile elastičnosti i sile trenja

Rad sile teže



Neka se tačka M pod dejstvom sile teže $\vec{G}$ pomjeri po nekoj krivoj iz položaja $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ u položaj $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$. S obzirom da sila $\vec{G}$ ima projekciju samo u pravcu z-ose, rad sile teže pri tom pomjeranju je

$$A_{M_0,M_1}=\int_{M_0}^{M_1}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)=-\int_{z_0}^{z_1}Gdz=-G\left(z_1-z_0\right)=G\left(z_0-z_1\right)$$

Rad sile teže jednak je proizvodu iz intenziteta sile i odgovarajućeg vertikalnog pomjeranja h njene napadne tačke. Rad je pozitivan ako početni položaj M_0 iznad konačnog položaja M_1 napadne tačke sile, a negativan ako je položaj M_0 ispod konačnog položaja M_1 tačke.

$$A=\pm Gh$$

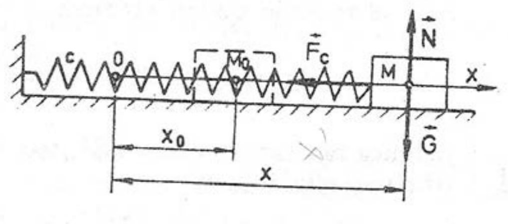
Rad sile teže ne zavisi od od dužine puta niti od oblika trajektorije napadne tačke sile već zavisi samo od normalnog rastojanja između horizontalnih ravni koje prolaze kroz početni i krajnji položaj tačke.

Sile koje imaju osobinu da im rad ne zavisi od dužine puta i oblika trajektorije nazivaju se konzervativne sile.

Rad sile elastičnosti (sile u opruzi):

Neka je tačka M vezana oprugom krutosti *c* koja je drugim krajem vezana za nepokretnu ravan. Ako tačku M izvedemo iz ravnotežnog položaja, ona će pod dejstvom sile uspostavljanja $\vec{F}_c$ vršiti pravolinijsko kretanje.

Ako je x veličina deformacije opruge, onda je projekcija sile u opruzi na Ox - osu $F_{cx} = -cx$, a rad sile na konačnom pomjeranju M_0M je određen izrazom:



$$A_{0,1} = \int_{M_0}^{M} F_{cx}dx = -c\int_{x_0}^{x} xdx = -c\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^{x} = \frac{c}{2}\left(x_0^2 - x^2\right)$$

U ovom izrazu x_0 je početna deformacija opruge (deformacija opruge u početnom položaju tačke), a x je krajnja deformacija opruge (deformacija opruge u krajnjem položaju tačke).

Ako nema početne deforamcije, $x_0 = 0$, onda je rad sile u opruzi na nekom konačnom pomjeranju x:

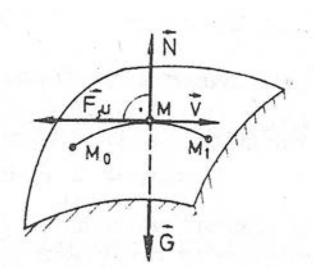
$$A_{0,1} = -\frac{1}{2}cx^2.$$

Analogno, kod torzione opruge sa konstantom torzione krutosti c_T, rad sile pri deformaciji za ugao φ je:

$$A_{0,1} = -\frac{1}{2}c_T\varphi^2.$$

Rad sile uspostavljanja $\vec{F}_c$ ne zavisi od oblika trajektorije već samo od početnog i krajnjeg položaja tačke, tako da je sila elastičnosti opruge takođe konzervativna sila.

Rad sile trenja klizanja



Ako se tačka M kreće po hrapavoj površini, onda na nju dejstvuje sila trenja klizanja. Pošto sila trenja klizanja uvijek ima smjer suprotan od smjera pomjeranja tačke M, rad sile trenja je:

$$A_{0,1} = \int_{M_0}^{M} F_{\mu}ds = -\mu\int_{M_0}^{M} Nds$$

Sila trenja klizanja nije konzervativna sila, već disipativna, budući da troši energiju, tj. usljed djelovanja sile trenja energija se pretvara u toplotu.

KONZERVATIVNE (POTENCIJALNE) SILE

Sila $\vec{F}$, odnosno njene projekcije, može da zavisi od pomjeranja njene napadne tačke, tj. da zavisi od položaja tačke. Poseban slučaj ove zavisnosti je kada postoji takva funkcija $U(x, y, z)$ koordinata napadne tačke sile, da se sila $\vec{F}$ može izraziti u obliku gradijenta ove funkcije:

$$\vec{F} = grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

gdje su projekcije sile na ose jednake parcijalnim izvodima funkcije U,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Skalarna funkcija $U(x, y, z)$ naziva se <u>funkcija sile</u>, a sila $\vec{F}$ je u tom slučaju <u>konzervativna sila</u>.

Ako je sila konzervativna, onda mora biti zadovoljeno

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\quad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}$$

Ove jednačine se mogu kraće zapisati preko rotora sile

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0.$$

Znači, sila $\vec{F}$ će biti konzervativna ako zavisi od položaja i ako je $rot\,\vec{F}=0$.

Elemenatrni rad konzervativne sile $\vec{F}$ na pomjeranju $d\vec{r}$ jednak je totalnom diferencijalu funkcije sile:

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU.$$

Rad konzervativne sile $\vec{F}$ na konačnom pomjeranju tačke iz položaja $M_0(x_0,y_0,z_0)$ u položaj $M_1(x_1,y_1,z_1)$ je

$$A_{M_0M}=\int_{M_0}^{M_1}dU=U\left(x_1,y_1,z_1\right)-U\left(x_0,y_0,z_0\right)=U_1-U_0,$$

<u>Rad konzervativne sile zavisi samo od vrijednosti funkcije sile (odnosno potencijalne energije) u krajnjem i početnom položaju, a ne zavisi od oblika putanje kojom se napadna tačka sile kretala</u>.

Često se u mehanici umjesto funkcije sile U koristi potencijalna energija $E_p(x,y,z)$, koja je jednaka funkciji sile sa negativnim predznakom, tj. $E_p=-U$.

U tom smislu se rad konzervativne sile može iskazati i preko potencijalne energije

$$A_{M_0M_1}=\int_{M_0}^{M_1}dU=\int_{M_0}^{M_1}-dE_p=E_{p0}-E_{p1}$$

tj. rad sila konzervativnog polja pri nekom pomjeranju materijalne tačke jednak je razlici vrijednosti potencijalne energije tačke u njenom početnom i krajnjem položaju.

ZAKON ODRŽANJA MEHANIČKE ENERGIJE

Zakon o promjeni kinetičke energije može se napisati kao:

$$E_{k1}-E_{k0}=\sum A_{i0,1}=E_{p0}-E_{p1}\quad\Rightarrow\quad E_{k0}+E_{p0}=E_{k1}+E_{p1}=const,$$

tj. ako sile koje dejstvuju na tačku imaju potencijal onda je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan.

<u>Ovim je iskazan zakon održanja mehaničke energije.</u>

Potencijalna energija materijalne tačke u bilo kojem njenom položaju jednaka je radu koji izvrše sile konzervativnog polja, koje dejstvuju na tačku, pri pomjeranju tačke iz datog u nulti položaj. Potencijalna energije tačke u nultom položaju je jednaka nuli, tj. $E_{p0}=0$.

S obzirom da smo prethodno definisali rad nekih konzervativnih sila, sada te sile možemo iskazati i preko potencijala:

a) potencijal težine $\vec{G}$ na udaljenosti z od površine zemlje naziva se gravitacioni potencijal, $E_p=Gz$

b) potencijal sile u opruzi, ako je opruga rastegnuta za iznos x (odnosno φ kod torzione opruge) je $E_p=\frac{1}{2}cx^2$ (odnosno za torzionu oprugu $E_p=\frac{1}{2}c_T\varphi^2$).

Suprotno od težine i sile u opruzi, sila trenja nema potencijal, tj. sila trenja nije konzervativna. To znači da njen rad zavisi od puta, a usljed sile trenja mehanička energija se pretvara u toplotu. Takve sile nazivamo disipativne sile (sile koje troše energiju).

U sistemima u kojima se pojavljuju takve sile ne vrijedi zakon održanja mehaničke energije, već se mora primijeniti zakon o promjeni kinetičke energije i pri izračunavanju rada sila potrebno je izračunati rad disipativne sile.

DINAMIKA MATERIJALNOG SISTEMA I KRUTOG TIJELA

MATERIJALNI SISTEM. PODJELA SILA KOJE DEJSTVUJU NA MATERIJALNI SISTEM

Pod pojmom materijalni sistem (sistem materijalnih tačaka) podrazumjeva se konačan broj materijalnih tačaka koje su na određeni način povezane. Analiza sistema materijalnih tačaka je veoma važna jer u prirodi i tehnici postoje kretanja u kojim učestvuje više tijela, a ta tijela možemo idealizovati materijalnim tačkama koje obrazuju materijalni sistem.

Diskretan materijalni sistem obrazuju materijalne tačke koje se nalaze na međusobno konačnim rastojanjima.

Ako su mase neprekidno raspoređene u nekom dijelu prostora, tada tačaka ima beskonačno mnogo i sistem obrazuje neprekidnu sredinu.

Oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja materijalno tijelo.

Materijalni sistem može biti obrazovan ne samo od skupa materijalnih tačaka, već i od skupa materijalnih tijela.

Sve sile koje dejstvuju na tačke sistema mogu se podijeliti na spoljašnje i unutrašnje sile.

Spoljašnje sile su sile kojima materijalne tačke ili tijela koja ne ulaze u sastav sistema dejstvuju na materijalne tačke ili tijela posmatranog materijalnog sistema, $\vec{F}^s$.

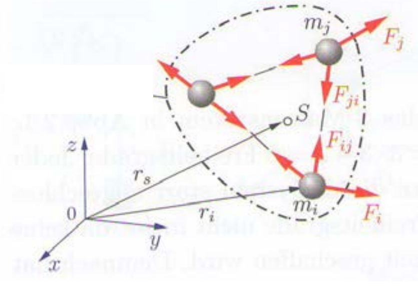
Unutrašnje sile su sile kojima dejstvuju jedna na drugu materijalne tačke (tijela) posmatranog sistema, $\vec{F}^u$.

Neke osobine unutrašnjih sila koje dejstvuju na sistem:

1) Vektorski zbir (glavni vektor) svih unutrašnjih sila materijalnog sistema jednak je nuli

$$\vec{F}_R^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u = 0$$

Ovo slijedi iz trećeg Njutnovog zakona (akcija=reakcija), tj. između bilo koje dvije tačke materijalnog sistema dejstvuju sile istog intenziteta i pravca a suprotnog smjera, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (indeks „ ij “ označava silu kojom j-ta masa sistema dejstvuje na i-tu masu, i obrnuto indeks „ ji “ označava silu kojom i-ta masa sistema dejstvuje na j-tu masu.



2) Vektorski zbir momenata (glavni moment) svih unutrašnjih sila materijalnog sistema u odnosu na proizvoljno izabrani pol o jednak je nuli

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_R^u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u = 0 .$$

GEOMETRIJA MASA. MASA MATERIJALNOG SISTEMA. SREDIŠTE (CENTAR) MASA

Kretanje materijalnog sistema osim sila koje dejstvuju na njega zavisi i od ukupne mase sistema i od rasporeda mase u tom sistemu.
Masa materijalnog sistema jednaka je algebarskom zbiru masa svih tačaka ili tijela, koje obrazju sistem

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Raspored masa materijalnog sistema prevashodno je okarkterisan položajem tačke koja se naziva središte masa ili centar inercije materijalnog sistema. Središte masa ili centar inercije materijalnog sistema sačinjenog od *n* materijalnih tačaka jeste geometrijska tačka C čiji je položaj u odnosu na izabrani sistem referencije Oxyz određen vektorom

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} .$$

Veličina $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ naziva se statički moment masa tačaka sistema. Položaj središta C masa moguće je odrediti pomoću Deakrtovih koordinata te tačke, tj. projektovanjem vektroske jednačine na ose Dekartovog koordinatnog sistema Oxyz

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

Očigledno je da položaj središta masa C sistema zavisi samo od rasporeda masa tačaka sistema, a ne zavisi od toga da li na razmatrani sistem dejstvuju ili ne dejstvuju sile, niti zavisi od izbora sistema referencije.
Ako sistem obrazuju kruta tijela, onda se na ovaj način može odrediti i položaj težišta sistema krutih tijela. Težište krutog tijela, odnosno neizmjenljivog materijalnog sistema, poklapa se sa središtem masa sistema. Središte masa je opštiji pojam od težišta, jer težište je definisano samo za kruto tijelo, dok središte masa kako karakteristika rasporeda masa se odnosi na bilo koji materijalni sistem, izmjenljiv ili neizmjenljiv.

MOMENTI INERCIJE MATERIJALNOG SISTEMA (POLARNI, AKSIJALNI, PLANARNI)

Pri translatornom kretanju materijalnog sistema ili krutog tijela, mjera inercije jeste masa sistema (tijela), a karakteristika rasporeda masa u tom slučaju jeste središte C masa ili centar inercije materijalnog sistema. Međutim, pri obrtnom kretanju materijalnog sistema, odnosno krutog tijela mjera inercije jeste moment inercije, koji takođe predstavlja karakteristiku rasporeda masa.
Moment inercije materijalnog sistema odnosno krutog tijela u odnosu na dati pol *O (polarni moment inercije)*, osu *z (aksijalni moment inercije)* ili ravan Π *(planarni moment inercije)* naziva se skalarna veličina koja je jednaka zbiru proizvoda masa svih tačaka sistema i kvadrata rastojanja tačaka od datog pola *O*, ose *z* ili ravni Π:

$$I_O=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad \textit{polarni moment inercije}$$

$$I_z=\sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 \quad \textit{aksijalni moment inercije}$$

$$I_\Pi=\sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\Pi}^2 \quad \textit{planarni moment inercije}$$

U SI sistemu mjera jedinica mjere za moment inercije je kilogram metar na kvadrat $\left[I\right]=kgm^2$.

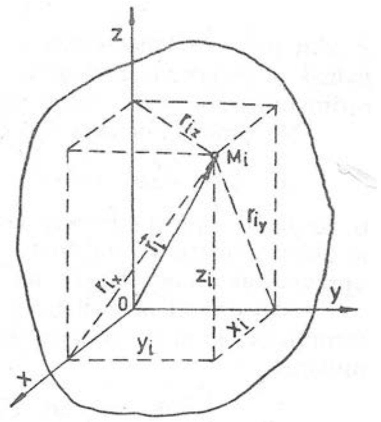
Ako materijalni sistem predstavlja homogeno kruto tijelo, onda je potrebno tijelo (u mislima) rastaviti na konačan broj elementarnih dijelova i odrediti približni momenet inercije po datim formulama, a zatim izračunati graničnu vrijednost približnog momenta inercije, pretpostavljajući da broj dijelova *n* na koje smo tijelo rastavili teži beskonačnosti. Moment inercije homogenog tijela u odnosu na proizvoljnu osu je

$$I_z=\lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2=\int_V r_z^2 dm$$

gdje se integral odnosi na cijelu yapreminu V tijela.

Ako posmatramo materijalni sistem, onda je aksijalni moment inercije tog sistema u odnosu na osu Ox određen sa

$$I_{Ox}=\sum_{i=1}^{n} m_i r_{ix}^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right), \text{ jer je } r_{ix}^2=\left(y_i^2+z_i^2\right).$$



Analogno je

$$I_{Oy}=\sum_{i=1}^{n} m_i r_{iy}^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+z_i^2\right), I_{Oz}=\sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right).$$

Polarni moment inercije je

$$I_O=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right).$$

Sabiranjem aksijalnih momenta inercije za ose Ox, Oy i Oz dobije se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+z_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)=2\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)$$

$$I_{Ox}+I_{Oy}+I_{Oz}=2I_O$$

tj. zbir aksijalnih momenata inercije materijalnog sistema za tri koordinatne ose Dekartovog pravouglog sistema referencije jednak je dvostrukom polarnom momentu inercije tog sistema za pol O koji se nalazi u koordinatnom početku datog referentnog sistema.

Za homogeno kruto tijelo momenti inercije definisani su sa

$$I_{Ox}=\int_V\left(y^2+z^2\right)dm, I_{Oy}=\int_V\left(x^2+z^2\right)dm, I_{Oz}=\int_V\left(x^2+y^2\right)dm$$

$$I_O=\int_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dm$$

Određivanje momenta inercije nehomogenih tijela ne vrši se korištenjem ovih formula, već eksperimentalnim metodama.

Moment inercije sistema u odnosu na proizvoljnu osu *z* moguće je izraziti u obliku proizvoda mase sistema i kvadrata linearnog rastojanja od te ose, tj. <u>poluprečnika inercije</u> u odnosu na tu osu

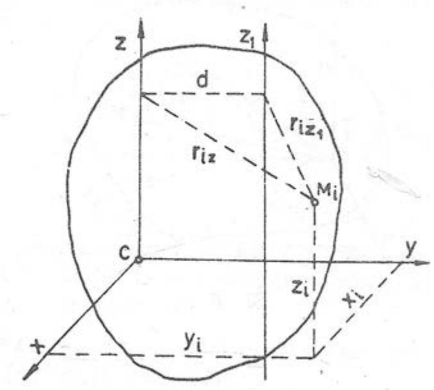
$$I_z=m\rho_z^2$$

Ukoliko je poznat moment inercije sistema za osu, onda se poluprečnik inercije tog sistema za osu određuje formulom

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}\ .$$

Poluprečnik inercije sistema je geometrijski jednak rastojanju od ose one tačke u koju treba koncentrisati cjelokupnu masu sistema, da bi moment inercije te tačke bio jednak momentu inercije datog sistema u odnosu na tu osu.

ZAVISNOST IZMEĐU MOMENATA INERCIJE SISTEMA U ODNOSU NA DVIJE PARALELNE OSE. HAJGENS-ŠTAJNEROVA TEOREMA



Da bi odredili moment inercije sistema u odnosu na osu z_1 koja je paralelna osi Cz koja prolazi kroz središte masa C sistema, postavimo sistem referencije Cxyz sa početkom u tački C (središte masa sistema). Aksijalni momenti inercije u odnosu na ose z i z_1 su

$$I_{Cz} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right),$$

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz_1}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + \left(y_i - d\right)^2\right)$$

odnosno

$$I_{z_1} = I_{Cz} + d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i - 2d \sum_{i=1}^{n} m_i y_i\ .$$

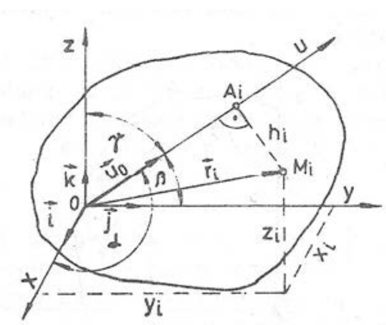
Na osnovu poznate koordinate y_C središta masa C sistema $m y_C = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, a kako je tačka C usvojena za početak sistema referencije Cxyz, to je $y_C = 0$, može se napisati

$$I_{z_1} = I_{Cz} + md^2$$

Ova formula izražava Hajgens-Štajnerovu teoremu: Moment inercije materijalnog sistema (tijela) za neku osu jednak je zbiru iz momenta inercije tog sistema (tijela) u odnosu na paralelnu osu koja prolazi kroz središte masa sistema (težište krutog tijela) i proizvoda mase sistema i kvadrata rastojanja između tih osa (zbir iz sopstvenog momenta inercije i položajnog momenta inercije).

Iz ove formule slijedi da je $I_{z_1} > I_{Cz}$, tj. najmanji je moment inercije za osu koja prolazi kroz središte masa sistema . Moment inercije za osu koja prolazi kroz središte masa sistema naziva se sopstveni moment inercije.

MOMENT INERCIJE ZA OSU PROIZVOLJNOG PRAVCA KROZ DATU TAČKU



Izvedimo moment inercije za osu u koja prolazi kroz tačku O (koordinatni početak) i koja sa osama x,y,z zaklapa uglove α, β, γ. Jedinični vektor $\vec{u}_o$ ose u ima projekcije cosα, cosβ i cosγ.

Ako je *h* rastojanje elementarne mase *dm* od ose u, onda je elementarni moment inercije za osu u

$$dI_u = h^2 dm\,,$$

a moment inercije tijela za osu u je

$$I_u = \int_V h^2 dm\,.$$

Rastojanje *h* se iskaže kao intenzitet vektorskog proizvoda vektora položaja $\vec{r}$ i jediničnog vektora $\vec{u}_o$:

$$\left|\vec{r} \times \vec{u}_o\right| = r u_o \sin\theta = r \sin\theta = h$$

ili se kvadrat ratojanja h^2 iskaže analitički

$$h^2 = \left(\vec{r} \times \vec{u}_o\right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \left(y\cos\gamma - z\cos\beta\right)^2 + \left(z\cos\alpha - x\cos\gamma\right)^2 + \left(x\cos\beta - y\cos\alpha\right)^2 =$$
$$= \left(y^2 + z^2\right)\cos^2\alpha + \left(x^2 + z^2\right)\cos^2\beta + \left(x^2 + y^2\right)\cos^2\gamma -$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma$$

Ako sada h^2 zamijenimo u integralu kojim definišemo moment inercije tijela i izdvojimo konstante ispred integrala, dobijemo

$$I_u = \cos^2\alpha \int_V \left(y^2 + z^2\right) dm + \cos^2\beta \int_V \left(x^2 + z^2\right) dm + \cos^2\gamma \int_V \left(x^2 + y^2\right) d -$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta \int_V xydm - 2\cos\beta\cos\gamma \int_V yzdm - 2\cos\alpha\cos\gamma \int_V xzdm =$$
$$= I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma$$

Veličine I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} nazivaju se centrifugalni momenti inercije (mogu biti veći ili manji od nule ili jednaki nuli):

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_V xydm, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V yzdm, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V xzdm$$, centrifugalni momenti inercije.

Negativne vrijednosti centrifugalnih momenata inercije nazivaju se proizvodi inercije:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_V xydm, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int_V yzdm, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int_V xzdm$$, proizvodi inercije.

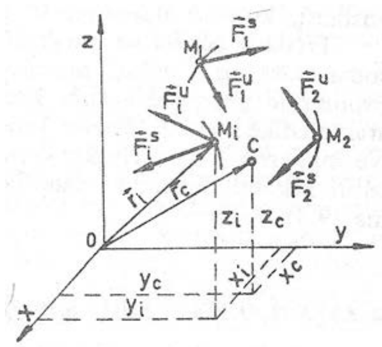
Devet veličina: $I_x, I_y, I_z, I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}$ (od kojih je nezavisnih šest) karakterišu inercijska svojstva tijela pri rotaciji (invarijantnu osobinu tijela pri njegovoj rotaciji) i nazivaju se tenzor inercije tijela (matrica inercije):

$$I = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}.$$

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE METERIJALNOG SISTEMA

ZAKON O KRETANJU SREDIŠTA MASA MATERIJALNOG SISTEMA

Posmatramo kretanje materijalnog sistema sačinjenog od n tačaka na koje dejstvuju spoljašnje i unutrašnje sile. Za svaku tačku sistema, ako ih posmatramo kao slobodne, mogu se napisati diferencijalne jednačine kretanja saglasno II Njutnovom zakonu



$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^s + \vec{F}_1^u$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^s + \vec{F}_2^u$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^s + \vec{F}_n^u$$

Sabiranjem jednačina za sve tačke sistema dobije se

$$\sum_{i=1}^{n} m_1\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_1^s + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_1^u$$

Kako je osobina unutrašnjih sila da je $\vec{F}_R^u = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}\,_i^u = 0$, a iz vektora položaja središta masa C $m\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$ se diferenciranjem po vremenu dobije $m\ddot{\vec{r}}_C = m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i$, može se napisati

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s$$

Ova jednačina izražava zakon o kretanju stedišta masa materijalnog sistema: <u>Središte masa C (centar inercije) materijalnog sistema kreće se kao materijalna tačka sa masom jednakom zbiru masa svih tačaka sistema na koju dejstvuje glavni vektor svih spoljašnjih sila sistema</u>.

Zakon o održanju kretanja središta masa materijalnog sistema:

Ako na razmatrani materijalni sistem dejstvuje takav sistem sila da je za sve vrijeme kretanja vektorski zbir spoljašnjih sila jednak nuli, $\vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}\,_i^s = 0$, onda je

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = const$$

<u>Ako je glavni vektor spoljašnjih sila koje dejstvuju na metrijalni sistem jednak nuli za sve vrijeme kretanja, onda se središte masa sistema kreće ravnomjerno pravolinijski.</u>

ZAKON O PROMJENI KOLIČINE KRETANJA MATERIJALNOG SISTEMA

Količina kretanja materijalnog sistem jednaka je vektorskom zbiru količina kretanja svih tačaka razmatranog sistema $\vec{K} = \sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$, a kako je brzina i-te tačke sistema $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$, može se napisati

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}_C\right) = m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C$$

Vektor količine kretanja materijalnog sistema jednak je proizvodu iz mase sistema i vektora brzine središta masa materijalnog sistema i ima pravac i smjer vektora brzine središta masa sistema.

Količina kretanja karakteriše samo translatorno kretanje materijalnog sistema, odnosno krutog tijela.

Diferenciranjem vektora količine kretanja materijalnog sistema dobije se

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_C\right)=m\frac{d\vec{v}_C}{dt}=m\vec{a}_C=\vec{F}_R^s, \qquad \text{odnosno}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{F}_R^s=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni količine kretanja materijalnog sistema u diferencijalnom obliku: Izvod po vremenu vektora količine kretanja materijalnog sistema jednak je glavnom vektoru spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem.

Promjenu količine kretanja materijalnog sistema, prema tome, izazivaju samo spoljašnje sile koje dejstvuju na sistem.

Iz $d\vec{K}=\vec{F}_R^s dt$, integraljenjem za neki vremenski interval u granicama od t_0 do t, dobijemo

$$\int_{t_0}^{t}d\vec{K}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}_R^s \quad\Rightarrow\quad \vec{K}(t)-\vec{K}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}_R^s dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_i^s dt, \qquad \text{odnosno}$$

$$\vec{K}-\vec{K}_0=\vec{I}^s=\sum_{i=1}^{n}\vec{I}_i^s$$

Jednačina izražava zakon o promjeni (priraštaju) količine kretanja metrijalnog sistema u konačnom (integralnom) obliku: Priračtaj količine kretanja materijalnog sistema u konačnom intervalu vremena jednak je vektrskom zbiru impulsa svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem u tom intervalu vremena.

Zakon o održanju količine kretanja materijalnog sistema:

Ako na razmatrani materijalni sistem dejstvuje takav sistem sila da je za sve vrijeme kretanja vektorski zbir spoljašnjih sila jednak nuli, $\vec{F}_R^s=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s=0$, onda je

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{F}_R^s=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{K}=m\vec{v}_C=const \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_C=const,$$

tj. brzina središta masa je konstantna ili jednaka nuli ako je u početnom trenutku $\left(\vec{v}_C\right)_0=0$.

ZAKON O PROMJENI KINETIČKOG MOMENTA (MOMENTA KOLIČINE KRETANJA) MATERIJALNOG SISTEMA

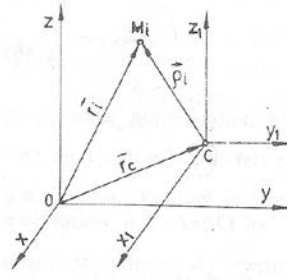
Kinetički moment materijalnog sistema:

Kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol jednak je vektorskom zbiru kinetičkih momenata svih tačaka metrijalnog sistema u odnosu na isti pol, tj.

$$\vec{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{iO}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i .$$

Veza između kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol i kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na središte masa sistema:

Ako sistem vrši složeno kretanje onda se to kretanje može razložiti na prenosno translatorno kretanje koje se vrši zajedno sa pokretnim sistemom referencije $Cx_1y_1z_1$ sa središtem C kao koordinatnim početkom i relativno kretanje sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Cx_1y_1z_1$.



Položaj proizvoljne tačke M_i sistema u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz određen je vektorom položaja $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$.

Apsolutna brzina tačke M_i određena je prvim izvodom po vremenu vektora položaja

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_C + \vec{\rho}_i\right) = \vec{v}_C + \vec{v}_{ir},$$

pa se kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol može napisati kao

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_C + \vec{\rho}_i\right)\times\left(m_i\vec{v}_C + m_i\vec{v}_{ir}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_C \times m_i\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_C \times m_i\vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir} = \\ &= \vec{r}_C \times \vec{v}_C\sum_{i=1}^{n} m_i + \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i \times \vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir} = \\ &= \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{r}_C \times \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i\right)\times\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir}\end{aligned}$$

Pošto je položaj središta materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Cx_1y_1z_1$ određen sa $m\vec{\rho}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i$, a kako je početak pokretnog koordinatnog sistema upravo središte C, onda je $\vec{\rho}_C = 0$, pa je kinetički moment sistema

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir} = \vec{r}_C \times \vec{K} + \vec{L}_{Cr}$$

gdje su: $\vec{K} = m\vec{v}_C$-vektor količine kretanja materijalnog sistema, $\vec{L}_{Cr} = \sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir}$ - kinetički moment materijalnog sistema u odnosu na središte masa C sistema.

Prema tome: Pri proizvoljnom kretanju materijalnog sistema kinemtički moment materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol O jednak je vektorskom zbiru momenta vektora količine kretanja središta masa sistema ($\vec{K} = m\vec{v}_C$) u odnosu na nepokretni pol O i kinetičkog moment materijalnog sistema u odnosu na središte masa sistema pri relativnom kretanju sistema u odnosu na središte masa C.

Zakon o promjeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol

Za i-tu tačku sistema, zakon o promjeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol O je

$$\frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u}$$

Ovakva jednačina može se napisati za svaku tačku sistema i kada izvršimo vektorsko sabiranje svih tih jednačina dobije se

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_{iO}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{O}^{\vec{F}_i^s}+\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{O}^{\vec{F}_i^u}\,,\quad \text{odnosno}\quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{iO}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{O}^{\vec{F}_i^s}+\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{O}^{\vec{F}_i^u}\,,$$

a kako je vektorski zbir momenata unutrašnjih sila u odnosu na pol O jednak nuli, dobije se

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{O}^{\vec{F}_i^s}\ .$$

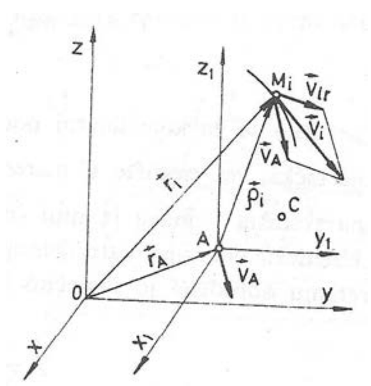
Ova jednačina izražava zakon o promjeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol: Izvod po vremenu vektora kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol jednak je vektorskom zbiru momenata (glavnom momentu) svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem u odnosu na isti nepokretni pol O.

ZAKON O PROMJENI KINETIČKE ENERGIJE MATERIJALNOG SISTEMA (KRUTOG TIJELA). KENTIGOVA TEOREMA

Kinetička energija materijalnog sistema. Kenigova teorema

Kinetička energija materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičkih enegrija E_{ki} svih materijalnih tačaka tog sistema:

$$E_k=\sum_{i-1}^{n}E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i v_i^2$$



gdje je v_i apsolutna brzina materijalne tačke.

Proizvoljno apsolutno kretanje materijalnog sistema u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz može se posmatrati kao zbir iz translatornog kretanja sistema zajedno sa pokretnim sistemom referencije $Ax_1\ y_1\ z_1$ i relativnog kretanja materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Ax_1\ y_1\ z_1$.

Položaj proizvoljne tačke M_i u odnosu na nepokretni sistem referencije Oxyz određen je sa $\vec{r}_i=\vec{r}_A+\vec{\rho}_i$, a apsolutna brzina tačke M_i je vektorski zbir brzine pola A i relativne brzine tačke M_i u odnosu na pol A

$$\vec{v}_i=\vec{v}_A+\vec{v}_{ir}$$

Kinetičke energije sistema je

$$E_k=\sum_{i-1}^{n}E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\vec{v}_A+\vec{v}_{ir}\right)\cdot\left(\vec{v}_A+\vec{v}_{ir}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_A\cdot\vec{v}_A+\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_A\cdot\vec{v}_{ir}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{ir}\cdot\vec{v}_{ir}=\frac{1}{2}v_A^2\sum_{i=1}^{n}m_i+\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_A\cdot\vec{v}_{ir}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i v_{ir}^2$$

Zbir u sredini izraza je

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_A\cdot\vec{v}_{ir}=\vec{v}_A\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{ir}=\vec{v}_A\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\rho}_{ir}=\vec{v}_A\frac{d}{dt}\left(m\vec{\rho}_C\right)=m\vec{v}_A\cdot\vec{v}_{Cr}$$

gdje je $\vec{v}_{Cr}$ relativna brzina središte masa materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije.

Ako se za koordinatni početak pokretnog sistema referencije izabere upravo središte masa C materijalnog sistema, onda je $\vec{v}_A=\vec{v}_C$, a relativna brzina središta jednaka je nuli $\vec{v}_{Cr}=0$, tako da je kinetičke energija materijalnog sistema:

$$E_k=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i v_{ir}^2$$

Ova jednačina izražava **Kenigovu teoremu** o kinetičkoj energiji materijalnog sistema: Kinetička energija metrijalnog sistema pri njegovom proizvoljnom apsolutnom kretanju jednaka je algebarskom zbiru iz kinetičke energije $\frac{1}{2}mv_C^2$ središta masa materijalnog sistema, pretpostavljajući da je u središtu C koncentrisana cjelokupna masa sistema, i kinetičke energije $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ir}^2$ pri relativnom kretanju materijalnog sistema u odnosu na pokretni sistem referencije $Cx_1\,y_1\,z_1$ koji je postavljen sa početkom u središtu masa.

Primjenom Kenigove teoreme mogu se izvesti izrazi za kinetičku energiju krutog tijela pri translatornom kretanju, pri obrtanju oko nepokretne ose, pri ravnom kretanju i pri opštem kretanju. Kako homogeno kruto tijelo predstavlja neizmjenljivi materijalni sitem sa neprekidnim rasporedom mase, kinetička energije krutog tijela računa se kao

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm \, .$$

Translatorno kretanje tijela: Pri transaltornom kretnju krutog tijela sve tačke tijela kreću se na isti način, tj.imaju iste brzine, pa je

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm = \frac{1}{2}v^2\int_V dm = \frac{1}{2}mv^2$$

Obrtanje tijela oko nepokretne ose: Pri obrtanju tijela oko nepokretne ose tačke tijela se kreću po kružnim putanjama sa centrom na obrtnoj osi, a intenziteti brzina su $v = r\omega$, tako da je kinetičke energija tijela

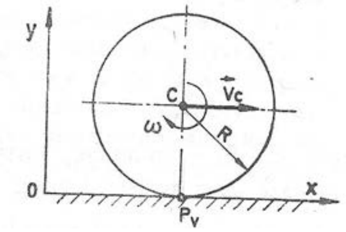
$$E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm = \frac{1}{2}\int_V (r\omega)^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2\int_V r^2 dm = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

gdje je I_z moment inercije tijela u odnosu na obrtnu osu Oz.

Ravno kretanje krutog tijela: Kako se ravno kretanje tijela može razložiti na translatorno kretanje tijela zajedno sa težištem C i na relativno obrtno kretanje tijela oko ose Cζ koja prolazi kroz težište, onda je relativna brzina i-te tačke tijela u odnosu na središte C, $v_{ir} = v_i^C = \rho_i\omega$, pa je kinetička energija tijela

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{C\zeta}\omega^2$$

gdje je $\frac{1}{2}mv_C^2$ kinetička energije usljed translatornog kretanja, a $\frac{1}{2}I_C\omega^2$ je kinetička energija usljed obrtanja tijela oko ose Cζ koja ne mijenja svoj položaj u odnosu na tijelo, pa se ne mijenja ni moment inercije $I_{C\zeta}$ u odnosu na tu osu.



Ako se iskoristi izraz za brzinu centra mase C i Štajnerova teorema, kinetičke energija tijela je

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\overline{CP_v}\,\omega\right)^2 + \frac{1}{2}I_{C\zeta}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m\overline{CP_v}^2 + I_{C\zeta}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{Pv}\omega^2$$

gdje je I_{Pv} moment inercije tijela za osu koja prolazi kroz trenutni pol brzina Pv. Ovaj izraz izražava činjenicu da se ravno kretanje može predstavi kao trenutno obrtanje oko ose kroz trenutni pol brzina Pv.

Međutim, kako se položaj trenutnog pola brzina mijenja tokom kretanja tijela, tako se mijenja i moment inercije tijela za osu koja prolazi kroz pol brzina, pa nije uvijek zgodno odrediti kinetičku energiju tijela ovim obrascem.

Opšte kretanje krutog tijela: Opšte kretanje krutog tijela može se predstaviti kao složeno kretanje sastavljeno od translatornog kretanja tijela zajedno sa težištem C tijela i relativnog obrtanja oko tačke C, odnosno trenutne obrtne ose koja prolazi kroz tačku C tijela i koja mijenja pravac tokom kretanja. Kinetička energija tijela je

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_\Omega \omega^2$$

gdje je I_Ω moment inercije tijela u odnosu na trenutnu obrtnu osu CΩ koja prolazi kroz težište krutog tijela.

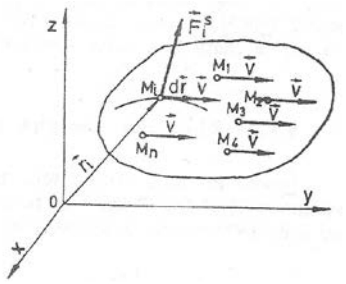
<u>Kinetička energija sistema krutih tijela određena je zbirom kinetičkih energija pojedinih tijela koja obrazuju sistem :</u>

$$E_k = \sum_{i-1}^{n} E_{ki} \ .$$

Rad sila koje dejstvuju na kruto tijelo:

a) Translatorno kretanje tijela:

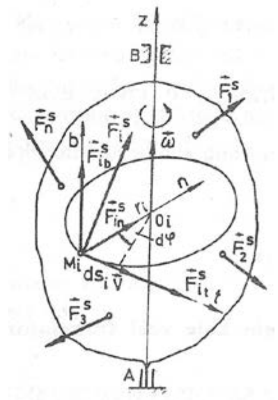
Ukupni elementarni rad sila je:



$$dA = \sum dA_i = \sum \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \sum \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}$$

Rad sila na konačnom pomjeranju je: $A_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} \int_I^{II} \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}$

b) Obrtanje tijela oko nepokretne ose:



Silu $\vec{F}_i^s$ koja dejstvuje na i-tu tačku tijela možemo razložiti u pravcu osa prirodnog trijedra, tako da je elementarni rad i-te sile:

$$dA_i = \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_{it}^s + \vec{F}_{in}^s + \vec{F}_{ib}^s\right) \cdot ds_i \vec{e}_t = F_{it}^s \cdot ds_i = F_{it}^s r_i d\varphi = M_z^{\vec{F}_i^s} d\varphi$$

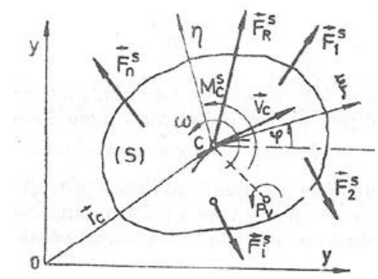
Ukupni elementarni rad svih sila koje dejstvuju na tijelo je:

$$dA = \sum dA_i = \sum M_z^{\vec{F}_i^s} d\varphi = M_z d\varphi$$

Rad svih sila koje dejstvuju na tijelo pri konačnom obrtanju je:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi$$

c) Ravno kretanje tijela:



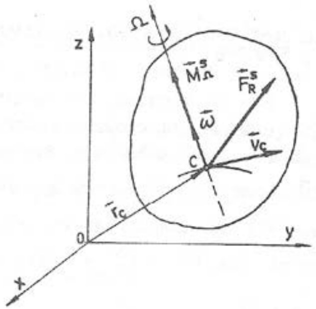
Kako se ravno kretanje sastoji iz translatornog kretanja tijela sa izabranim polom i obrtanja tijela oko ose koja prolazi kroz izabrani pol, ako sve sile koje dejstvuju na tijelo redukuju na pol (težište C) dobiće se glavni vektor spoljašnjih sila i glavni moment sila, pa je elementarni rad sila određen sa

$$dA = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + M_{C\zeta} d\varphi \, ,$$

gdje je $M_{C\zeta} = \sum M_{C\zeta}^{\vec{F}_i^s}$ glavni moment spolj. sila u odnosu na osu koja prolazi kroz težište a upravna je na ravan kretanja. Rad spoljašnjih sila na konačnom pomjeranju tijela

je: $A = \int_{C_I}^{C_{II}} \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{C\zeta} d\varphi \, .$

d) Opšte kretanje krutog tijela:



U slučaju opšteg kretanja tijelo se obrće oko tačke C koja se takođe kreće u prostoru, rad vrši i glavni vektor i glavni moment spoljašnjih sila

$$\delta A = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + M_\Omega^s \delta\alpha$$

gdje je $M_\Omega^s = \sum_{i=1}^{n} M_\Omega^{\vec{F}_i^s}$ glavni moment spoljašnjih sila u odnosu na trenutnu obrtnu osu koja prolazi kroz pokretni pol C tijela.

Zakon o promjeni kinetičke energije sistema

Za i-tu tačku sistema može se napisati zakon o promjeni kinetičke energije

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 = A_i^s + A_i^u$$

gdje je A_i^s rad svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na tačku i A_i^u rad svih unutrašnjih sila koje dejstvuju na tačku. Sabiranjem jednačina za sve tačke sistema dobije se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{n} A_i^s + \sum_{i=1}^{n} A_i^u$$

$$E_k - E_{k0} = \sum_{i=1}^{n} A_i^s + \sum_{i=1}^{n} A_i^u$$

Jednačina iskazuje zakon o promejni kinetičke energije u konačnom obliku za izmjenljivi materijalni sistem: <u>Priraštaj kinetičke energije izmjenljivog materijalnog sistema pri njegovom pomjeranju iz početnog u krajnji položaj jednak je zbiru radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje dejstvuju na izmjenljivi sistem na tom pomjeranju</u>. Treba primijetiti da promjena kinetičke energije sistema zavisi i od unutrašnjih sila, tj.rad unutrašnjih sila različit je od nule u slučajevima kada se pri kretnju tijela deformišu ili ako su unutrašnje veze ostvarene preko elastičnih elemenata-opruga, rastegljivih užadi i sl.

U slučaju neizmjenljivog sistema rad unutrašnjih sila jednak je nuli, $\sum_{i=1}^{n} A_i^u = 0$, pa je zakon

$$E_k - E_{k0} = \sum_{i=1}^{n} A_i^s$$

tj. <u>priraštaj kinetičke energije neizmjenljivog materijalnog sistema na nekom njegovom pomjeranju jednak je zbiru radova svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na neizmjenljivi sistem na tom pomjeranju</u>.

Zakon o promjeni kinetičke energije može se napisati i u diferenicijalnom obliku:

$$d\left(\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \sum \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}_i + \sum \vec{F}_i^u \cdot d\vec{r}$$

$$dE_k = \sum dA_i^s + \sum dA_i^u \quad \textit{za izmjenljivi sistem}$$

$$dE_k = \sum dA_i^s \quad \textit{za neizmjenljivi sistem}$$

<u>Diferencijal kinetičke energije materijalnog sistema jednak je zbiru elementarnih radova svih spoljašnjih sila i unutrašnjih sila koje dejstvuju na sistem</u>.

Zakon o održanju mehaničke energije

<u>Ako sve sile koje vrše rad pri kretanju tijela predstavljaju konzervativne sile</u>, onda se njihov elementarni rad može izraziti kao totalni diferencijal funkcije sile U(x,y,z), odnosno pomoću potencijalne energije E_p:

$$dA = dU = -dE_p$$

Iz zakona o promjeni kinetičke energije imamo:

$$dE_k = dA = -dE_p \qquad \text{odakle je} \qquad d\left(E_k + E_p\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_k + E_p = E = const$$

Pri kretanju materijalnog sistema pod dejstvom konzervativnih (potencijalnih) sila, zbir kinetičke i potencijalne energije (mehanička energija) sistema ostaje nepromjenjen za sve vrste kretanja.

ELEMENTI ANALITIČKE MEHANIKE

GENERALISANE (UOPŠTENE) KOORDINATE.
BROJ STEPENI SLOBODE MATERIJALNOG SISTEMA

Broj stepeni slobode kretanja materijalnog sistema jeste broj nezavisno promjenljivih koordinata koje potpuno određuju položaj svih tačaka tog sistema u prostoru, tj. koje određuju položaj sistema.

Ako posmatramo sistem od „n" materijalnih tačaka, onda taj sistem ima 3n Dekartovih koordinata ($x_1,y_1,z_1,\ x_2,y_2,z_2,...,\ x_n,y_n,z_n$) jer svakoj tački odgovoraju po tri koordinate. Neka je broj holonomnih veza između koordinate tačaka jednak *„r"* i neka su jednačine veze zapisane u obliku, tako da indeks *„p"* označava redni broj veze

$$f_p\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n\right) = 0, \left(p = 1, 2, ..., r\right).$$

Ako je broj veza jednak ukupnom broju koordinata, tj. r=3n, to znači da se sistem neće kretati i prethodnim jednačinama su određene sve 3n koordinate materijalnog sistema. Da bi se sistem mogao kretati potrebno je da broj veza *„r"* bude manji od 3n (broj koordinata). U slučaju kada je r<3n nisu sve koordinate tačaka sistema nezavisne među sobom, jer se na osnovu *„r"* jednačina veza može *„r"* koordinata izraziti pomoću ostalih (3n-*r*) koordinata.

Stoga se (3n-*r*) koordina sistema mogu se razmatrati kao nezavisno promjenljive, koje mogu uzimati proizvoljne vrijednosti i koje potpuno određuju položaj sistema, a ostalih *„r"* koordinata određuje se preko jednačina veze kao funkcija tih nezavisnih koordinata.

Broj nezavisnih koordinata materijalnog sistema jednak je broju stepeni slobode sistema i određuje se

$s = 3n - r$, gdje „n" broj tačaka sistema a „r" je broj holonomnih veza.

Nezavisni parametri čiji je broj jednak broju stepeni slobode materijalnog sistema $s = 3n - r$ i pomoću kojih se može u svakom trenutku jednoznačno odrediti položaj sistema, nazivaju se generalisane koordinate sistema.

Pri opisisvanju položaja tačaka materijalnog sistema nije neophodno koristiti isključivo Dekartove koordinate, nego je često zgodnije uočiti skup od „s" nezavisno promjenljivih generalisanih koordinata, koje mogu imati karakter pravolinijskih koordinata, rastojanja ili uglova, preko kojih je potpuno određen položaj svake tačke sistema. Preko generalisanih koorinata q_1, q_2,.., q_s (s-broj stepeni slobode sistema) mogu se izraziti i Dekartove koordinate svake tačke sistema

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, .., q_s\right),\ \left(i = 1, 2, .., n\right).$$

Na osnovu definicije generalisanih koordinata kretanje materijalnog sistema biće potpuno određeno ako su generalisane koordinate q_k poznate funkcije vremena

$$q_1 = q_1\left(t\right), q_2 = q_2\left(t\right), ..., q_s = q_s\left(t\right).$$

VIRTUALNO (MOGUĆNO) POMJERANJE MATERIJALNOG SISTEMA

Virtualno ili mogućno pomjeranje materijalnog sistema naziva se svako zamišljeno beskonačno malo pomjeranje tačaka sistema koje u datom trenutku dopuštaju veze kojima je sistem podvrgnut.

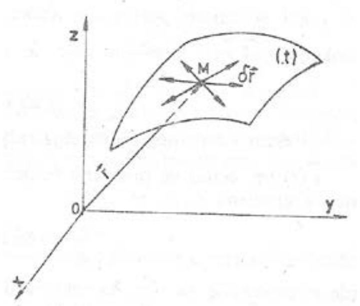
Drugim riječima, virtulano pomjeranje je svako zamišljeno beskonačno malo pomjeranje tačaka sistema koje bi te tačke mogle da izvrše u datom trenutku iz datog položaja ne narušavajući veze.

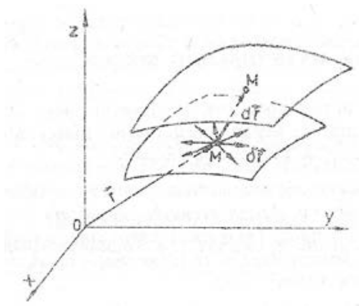
Virtualno ili mogućno pomjeranje jeste geometrijski pojam jer to pomjeranje ne zavisi od dejstva sile na sistem, već zavisi samo od karaktera veza kojima je sistem podvrgnut.

Posmatrajmo materijalnu tačku M koja se kreće po nepokretnoj površini čija jednačina $f\left(x,y,z\right)=0$ predstavlja jednačinu holonomne stacionarne veze zadržavajuće veze. Tačka ima dva stepena slobode, jer su od tri koordinate tačke dvije nezavisne, a treća se određuje pomoću jednačine veze. Zamislimo da je vrijeme *t* prestalo da se mijenja i razmotrimo u kojim se sve pravcima tačka može pomjerati po površini. Vektor $\delta\vec{r}$ beskonačno malog pomjeranja tačke M pri kome ona ne napušta datu površ jeste vektor virtualnog pomjeranja i on je usmjeren po tangenti na površ u tački M u bilo kom pravcu.

Stvarno pomjeranje tačke M po površi zavisi kako od sila koje dejstvuju na tačku i karaktera veze tako i od početnih uslova kretanja i ono je funkcija vremena.

U slučaju stacionarnih veza (veze koje ne zavise od vremena) pravac vektora stvarnog pomjeranja $d\vec{r}$ poklapa se sa pravcem jednog od vektora virtualnog pomjeranja, dok u slučaju nestacionarnih veza stvarno pomjeranje $d\vec{r}$ tačke se uopšte ne poklapa ni sa jednim od mogućnih pomjeranje tačke M.





Pri stavrnom pomjeranju tačke M vektor pomjeranja $d\vec{r}$ je diferencijal funkcije položaja $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$,

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

Vektor virtulanoh pomjeranja tačke M po svom smislu je varijacija funkcije $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$ pri čemu se promjena funkcije određuje pri konstantnoj vrijednosti argumenta vremena *t*, pa je

$$\delta\vec{r}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$$

gdje su $\delta x,\delta y,\delta z$ varijacije koordinata x,y,z tačke M.

Prve varijacije formalno se određuju na isti način kao i diferencijali dx,dy,dz funkcije, pri čemu se vrijeme smatra konstantnim.

Ako se položaj tačaka sistema izrazi neposredno preko generalisanih koordinata, tada je kretanje sistema podvrgnutog stacionarnim vezama određeno sa konačnim jednačinama kretanja $q_k=q_k\left(t\right),\left(k=1,2,..,s\right)$.

Elementarna pomjeranja u intervalu vremena *dt* data su preko odgovarajućih priraštaja generalisanih koordinata

$$d\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}dq_k,\quad\left(i=1,2,..,N\right)$$

a virtualna pomjeranja prikazujemo u obliku

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k,\quad\left(i=1,2,..,N\right).$$

RAD SILA NA VIRTUALNIM POMJERANJIMA

Rad sile $\vec{F}_i$,koja predstavlja rezultantu svih sila koje dejstvuju na proizvoljnu tačku M_i sistema, na virtualnom pomjeranju $\delta\vec{r}_i$ te tačke izračunavamo analogno elementarnom radu te sile na stvranom pomjeranju tačke, tj.

$$\delta A_i = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = F_i \delta s_i \cos\left(\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i\right),$$

gdje je intenzitet vektora virtualnog pomjeranja $\left|\delta\vec{r}_i\right|$ tačke M jednak luku δs_i trajektorije koju može da opiše tačka M_i pri svom virtualnom pomjeranju, tj. $\left|\delta\vec{r}_i\right| = \delta s_i$.

Rad sila na virtualnim pomjeranjima sistema naziva se virtulani ili mogućni rad.

Za sve tačke razmatranog sistema mogu se napisati jednačine za rad sile, pa sabiranjem tih jednačina za cio materijalni sistem dobijamo

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos\left(\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i\right).$$

GENERALISANE SILE

Rad sila na virtualnim pomjeranjima moguće je izraziti preko generalisanih koordinata sistema.

Ako varijaciju $\delta\vec{r}_i$ vektora položaja tačke izrazimo pomoću varijacija $\delta q_1, \delta q_2, .., \delta q_s$ generalisanih koordinata

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \quad \left(i = 1, 2, .., N\right)$$

onda je virtualni rad

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

Ili mijenjajući redosljed sabiranja

$$\delta A = \sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Možemo uvesti oznaku

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \quad \left(k = 1, 2, .., s\right)$$

Tako da se izraz za virtualni rad može zapisati kao

$$\delta A = \sum_{k=1}^{s} Q_k \cdot \delta q_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + .. + Q_s \delta q_s$$

<u>Množitelji $Q_1, Q_2, .., Q_s$ uz varijacije generalisanih koordinata $\delta q_1, \delta q_2, .., \delta q_s$ u izrazu za virualni rad aktivnih sila koje dejstvuju na sistem, nazivaju se generalisane sile sistema.</u>

Broj generalisanih sila sistema jednak je broju generalisanih koordinata, odnosno broju stepeni slobode sistema.

Dimenzija generalisane sile zavisi od dimenzije odgovarajuće generalisane koordinate i određuje se sa

$\left[Q\right]=\frac{\left[A\right]}{\left[q\right]}=\frac{\left[rad\right]}{\left[q\right]}$, što znači da ako generalisana koordinata ima dimenziju dužine (m) onda generalisana sila ima dimenziju obične sile (N), ali ako je za generalisanu koordinatu usvojen ugao onda generalisana sila ima dimenziju momenta sile (Nm).

Ako na sistem dejstvuju konzervativne sile, potencijalna enegrija sistema je E_p= -U , gje je U funkcija sile, onda se generalisane sile mogu odrediti kao

$$Q_k=-\frac{\partial E_p}{\partial q_k}\quad\left(k=1,2,..,s\right),$$

tj. generalisana sila sistema jednaka je parcijalnom izvodu potencijalne energije sistema po odgovrajućoj generalisanoj koordinati uzetim sa negativnim predznakom.

OSNOVNE JEDNAČINE DINAMIKE MATERIJALNIH SISTEMA

- Lagranževe jednačine prve vrste
- Opšta jednačina statike (Lagranžev princip virtualnih pomjeranja)
- Opšta jednačina dinamike (Lagranž-Dalamberov princip)
- Lagranževe jednačine druge vrste

OPŠTA JEDNAČINA STATIKE (LAGRANŽEV PRINCIP VIRTUALNIH POMJERANJA)

Lagranžev princip virtualnih pomjeranja (opšta jednačina statike) izražava potrebne i dovoljne uslove za ravnotežu svakog materijalnog sistema: Za ravnotežu sila u svakoj tački materijalnih sistema podvrgnutih idealnim holonomnim stacionarnim zadržavajućim vezama potrebno je i dovoljno da zbir radova svih aktivnih sila koje dejstvuju na sistem na svakom virtualnom pomjeranju sistema bude jednak nuli pod pretpostavkom da su početne brzine svih tačaka sistema jednake nuli. Matematički izraz ovog principa je

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i=0\,.$$

Lagranžev princip virtualnih pomjeranja može se iskazati i pomoću generalisanih sila sistema:

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{s}Q_k\cdot\delta q_k=0$$

Kako su sve varijacije generalisanih koordinata $\delta q_1,\delta q_2,..,\delta q_s$ nezavisne među sobom, jednačina će biti zadovoljena samo ako su svi koeficijenti $Q_1,Q_2,..,Q_s$ uz nezavisne varijacije jednaki nuli, tj.

$$Q_1=0,\,Q_2=0,...,\,Q_s=0$$

Za ravnotežu materijalnog sistema sa zadržavajućim idealnim, stacionarnim i holonomnim vezama, potrebno je i dovoljno da generalisane sile koje odgovaraju izabranim generalisanim koordinatama sistema budu jednake nuli, pod pretpostavkom da su početne brzine svih tačaka sistema jednake nuli.

Ako na ssitem dejstvuju konzervativne sile, onda se Lagranžev princip virtualnih pomjeranja može se iskazati sa

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1}=0,\,\frac{\partial E_p}{\partial q_2}=0,...,\,\frac{\partial E_p}{\partial q_s}=0$$

Da bi sistem bio u stabinoj ili labilnoj ravnoteži potencijalna energija sistema mora imati ekstremne vrijednosti, minimum ili maksimum, pa slijedi: Ako u datom položaju konzervativnog sistema potencijalna energija sistema ima ekstremnu vrijednost onda je taj položaj ravnoteže sistema stabilan ili labilan. Ako se zahtijeva da položaj ravnoteže sistema bude stabilan položaj, onda potencijalna energija sistema u tom položaju mora imati minimum.

OPŠTA JEDNAČINA DINAMIKE (LAGRANŽ-DALAMBEROV PRINCIP)

Ako posmatramo sistem materijalnih tačaka $P_{1,} P_2, .., P_n$ koji je podvrgnut uticaju samo idealnih veza, možemo napisati jednačine kretanja za materijalne tačke sistema, kao za skup slobodnih tačaka koje smo oslobodili veza a dejstvo veza zamjenili odgovarajućim silama:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^a + \vec{R}_i \quad \left(i = 1, 2, .., n\right).$$

Svaku od ovih jednačina pomnožimo sa odgovrajućim vektorom virtualnih pomjeranja i zatim saberemo sve tako dobijene jednačine:

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{F}_1^a \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_1 \cdot \delta \vec{r}_1$$

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot \delta \vec{r}_2 = \vec{F}_1^a \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{R}_1 \cdot \delta \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

....

$$m_n \vec{a}_n \cdot \delta \vec{r}_n = \vec{F}_n^a \cdot \delta \vec{r}_n + \vec{R}_n \cdot \delta \vec{r}_n$$

Po pretpostavci su veze sistema idealne, pa je $\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ (rad reakcija idealnih veza na virtualnom pomjeranju jednak je nuli), a onda je gornja jednačina može napisati kao

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i, \qquad \text{odnosno} \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i \vec{a}_i\right) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Veličine $\left(-m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{in}\right)$ koje imaju dimneziju sila nazivaju se inercijalne sile, a odnose se na svaku materijalnu tačku ponaosob. Uvodeći tertmin inercijalne sile, gornja jednačina iskazuje Lagranž-Dalamberov princip (opštu jednačinu dinamike): Pri proizvoljno kretanju materijalnog sistema sa idealnim zadržavajućim vezama u svakom trenutku vremena zbir radova svih aktivnih sila i svih uslovno pridodatih sila inercije na svakom virtualnom pomjeranju sistema jednak je nuli.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^{in}\right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Lagranž-Dalamberov princip (opšta jednačinu dinamike) omogućuje da se napišu diferencijalne jednačine kretanja bilo kog materijalnog sitema. Na taj način iz ovog principa slijede i svi opšti zakoni kretanja materijalnog sistema.

LAGRANŽEVE JEDNAČINE DRUGE VRSTE

Ako se sistem koji ima više stepeni slobode sastoji iz sistema krutih tijela koja se ne kreću translatorno, primjena Lagranž-Dalamberovog principa usložnjava problem formiranja diferencijalnih jednačina kretanja sistema, zbog toga što je, osim izračunavanja virtualnioh radova aktivnih sila, glavnih vektora i glavnih momenata sila inercije razmatranog sistema, potrebno iz formiranih jednačina eliminisati zavisne koordinate i njihove varijacije.

Zbog toga je u u takvim složenim slučajevima pogodnije formirati diferencijalne jednačine kretanja sistema u odnosu na generalisane koordinate, što se postiže Lagranževim jednačinama druge vrste.

Izvođenje Lagranževih jednačina druge vrste proističe iz Lagranž-Dalamberovog principa, gdje se vektori virtualnih pomjeranja iskazuju u funkciji generalisanih koordinata

$$za \quad \delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k, \quad (i = 1, 2, .., n)$$

$$iz \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^a - m_i\vec{a}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^a - m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)\cdot\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = 0$$

Ovu jednačinu pomnožimo sa (-1) i promjenimo red sabiranja,

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0.$$

Drugi zbir u zagradi ove jednačine je generalisana sila sistema, tako da jednačina postaje

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0.$$

Prvi član pod znakom sume u zagradi prethodne jednačine napisaćemo kao

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i\vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}.$$

Razmotrimo parcijalne izvode koji figurišu u jednačini:

Brzina proizvoljne tačke sistema podvrgnutog nestacionarnim vezama je

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + .. + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\vec{r}_i}{dt}$$, gdje je $\dot{q}_k$ generalisana brzina,

a brzina proizvoljne tačke sistema podvrgnutog stacionarnim vezama je

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + .. + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k.$$

Odavde je parcijalni izvod brzine po bilo kojoj generalisanoj koordinati jednak $\dfrac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k} = \dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$.

U slučaju stacionarnih veza je

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_k\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_k\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_s,$$

a s druge strane je

$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_1\partial q_k}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_2\partial q_k}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s,$$

pa se može uspostaviti jednakost

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k}.$$

Sada je

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i\vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right) - m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k}$$

Pošto je

$$m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right), \quad m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right),$$

prethodni izraz se može napisati u obliku

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right).$$

Vratimo se na jednačinu

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0$$

koju sad možemo napisati kao

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2} - Q_k\right)\delta q_k = 0 \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0 .$$

S obzirom da su varijacije generalisanih koordinata $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ proizvoljne i različite od nule, to je prethodna jednačina zadovoljena samo onda kada je izraz u zagradi jednak nuli, tj.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Ove jednačine su diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema izražene preko generalisanih koordinata i nazivaju se **Lagranževe jednačine druge vrste**. Integracijom ovih jednačina uz korištenje početnih uslova kretanja određuju se jednačine kretanja sistema $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), ..., q_s = q_s(t)$. Kada je materijalni sistem podvrgnut holonomnim vezama, broj Lagranževih jednačina druge vrste jednak je broju generalisanih koordinata sistema, tj. broju stepeni slobode materijalnog sistema.

Prednost Lagranževih jednačina druge vrste u odnosu na druge metode proučavanja kretanja materijalnog sistema je u tome što broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema ne zavisi od broja članova sistema, već isključivo od broja stepeni slobode sistema. Takođe, sile koje dejstvuju na sistem uključene su u Lagranževe jednačine druge vrste preko generalisanih sila u koje ulaze samo aktivne sile, a sve reakcije idealnih veza su isključene.

Lagranževe jednačine druge vrste za konzervativne sisteme

Ako na sistem dejstvuju konzervativne sile, onda je $Q_k = -\dfrac{\partial E_p}{\partial q_k}$, pa Lagranževe jednačine II vrste glase

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Pošto je potencijalna energija stacionarnih konzervativnih sistema funkcija samo generalisanih koordinata, $E_p = E_p(q_1, q_2, .., q_s)$, tj. ne zavisi od generalisanih brzina, to se jednačine mogu napisati kao

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(E_k - E_p)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(E_k - E_p)}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Veličina $E_k - E_p = L$ naziva se Lagranževa funkcija ili kinetički potencijal, pa se jednačine mogu napisati

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Ove jednačine predstavljaju Lagranževe jednačine II vrste za konzervativne sisteme.

LITERATURA

[1] L. Rusov: Kinamatika , Dinamika, Naučna knjiga Beograd, 1988.

[2] D. Gross, idr: Technische Mechanik 1 - Statik, Springer, 2009.

[3] D. Gross, idr: Engineering mechanics 3 - Dynamics, Springer, 2011.

[4] S. M. Targ: Teorijska mehanika – kratki kurs, Građevinska knjiga Beograd, 1985.

[5] N. Naerlović-Veljković: Mehanika 2, Naučna knjiga Beograd, 1992.god.

SADRŽAJ

UVOD U MEHANIKU 3

KINEMATIKA

UVOD U KINEMATIKU 5

KINEMATIKA TAČKE 6

OSNOVNI ZADATAK KINEMATIKE TAČKE 6

VEKTORSKI POSTUPAK ODREĐIVANJA PROIZVOLJNOG KRIVOLINIJSKOG KRETANJA TAČKE 6

ANALITIČKI (KOORDINATNI) POSTUPAK ODREĐIVANJA KRETANJA TAČKE 7

PRIRODNI POSTUPAK ODREĐIVANJA KRETANJA TAČKE 7

BRZINA TAČKE 8

UBRZANJE TAČKE 9

BRZINA I UBRZANJE U DEKARTOVIM KOORDINATAMA 10

BRZINA I UBRZANJE TAČKE U POLARNIM KOORDINATAMA 11

Poseban slučaj je kretanje tačke po kružnoj putanji 12

Centralno kretanje 13

BRZINA I UBRZANJE U PRIRODNOM KOORDINATNOM SISTEMU 13

Poseban slučaj kretanja po kružnoj putanji 15

NEKI PRIMJERI PRAVOLINIJSKOG I KRIVOLINIJSKOG KRETANJA TAČKE 17

KINEMATIKA KRUTOG TIJELA 18

ODREĐIVANJE POLOŽAJA KRUTOG TIJELA U PROSTORU 18

TRANSLATORNO KRETANJE KRUTOG TIJELA 20

OBRTANJE KRUTOG TIJELA OKO NEPOKRETNE OSE 21

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje tijela 21

Brzine tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne ose. Ojlerova formula za brzinu 22

Ubrzanja tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne ose 23

RAVNO KRETANJE KRUTOG TIJELA 24

Jednačine ravnog kretanja krutog tijela 24

Razlaganje ravnog kretanja krutog tijela na translatorno i obrtno kretanje 24

Brzine tačaka tijela koje vrši ravno kretanje 25

Teorema o projekcijama vektora brzina tačaka ravne figure 25

Trenutni pol brzina ravne figure 26

Ubrzanja tačaka krutog tijela koje vrši ravno kretanje 27

Trenutni pol ubrzanja ravne figure 28

Teorema o centru obrtanja za konačno pomjeranje ravne figure(bernuli-šalova toerema) 28

OBRTANJE KRUTOG TIJELA OKO NEPOKRETNE TAČKE(SFERNO KRETANJE KRUTOG TIJELA) 29

Jednačine sfernog kretanja krutog tijela 29

Ojler-Dalamberova teorema 30

Trenutna ugaona brzina i trenutno ugaono ubrzanje tijela koje se obrće oko nepokretne tačke 30

Ojlerove kinematičke jednačine 31

Brzine i ubrzanja tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke 32
Određivanje položaja trenutne obrtne ose 33
OPŠTE KRETANJE SLOBODNOG KRUTOG TIJELA 34
Jednačine opšteg kretanja slobodnog krutog tijela 34
Brzine tačaka tijela koje vrši opšte kretanje 34
Ubrzanje tačaka tijela koje vrši opšte kretanje 35
SLOŽENO KRETANJE TAČKE 36
Relativno, prenosno i apsolutno kretanje tačke 36
Apsolutna brzina tačke 36
Apsolutno ubrzanje tačke 38
Konstrukcija koriolisovog ubrzanja 39
DINAMIKA
OSNOVNI POJMOVI I ZAKONI DINAMIKE 41
DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE 42
DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA SLOBODNE MATERIJALNE TAČKE 42
DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA NESLOBODNE (VEZANE) MATERIJALNE TAČKE 44
Kretanje tačke po glatkoj nepokretnoj površi. Lagranževe jednačine prve vrste 45
Prinudno kretanje materijalne tačke po krivoj. Ojlerove jednačine 45
Sile otpora 47
OPŠTI ZAKONI DINAMIKE MATERIJALNE TAČKE 48
KOLIČINA KRETANJA. ZAKON KOLIČINE KRETANJA (ZAKON IMPULSA) 48
MOMENT KOLIČINE KRETANJA. ZAKON MOMENTA KOLIČINE KRETANJA 49
RAD SILE. ENERGIJA. ZAKON KINETIČKE ENERGIJE MATERIJALNE TAČKE 51
KONZERVATIVNE (POTENCIJALNE) SILE 54
ZAKON ODRŽANJA MEHANIČKE ENERGIJE 55
DINAMIKA MATERIJALNOG SISTEMA 56
MATERIJALNI SISTEM. PODJELA SILA KOJE DEJSTVUJU NA MATERIJALNI SISTEM 56
GEOMETRIJA MASA. MASA MATERIJALNOG SISTEMA. SREDIŠTE (CENTAR) MASA 57
MOMENTI INERCIJE MATERIJALNOG SISTEMA (POLARNI, AKSIJALNI, PLANARNI) 57
ZAVISNOST IZMEĐU MOMENATA INERCIJE SISTEMA U ODNOSU NA DVIJE PARALELNE OSE. HAJGENS-ŠTAJNEROVA TEOREMA 59
MOMENT INERCIJE ZA OSU PROIZVOLJNOG PRAVCA KROZ DATU TAČKU 59
OPŠTI ZAKONI DINAMIKE METERIJALNOG SISTEMA 61
Zakon o kretanju središta masa materijalnog sistema 61
Zakon o promjeni količine kretanja materijalnog sistema 61
Zakon o promjeni kinetičkog momenta (momenta količine kretanja) materijalnog sistema 62
Zakon o promjeni kinetičke energije materijalnog sistema (krutog tijela). Kentigova teorema 64
ELEMENTI ANALITIČKE MEHANIKE 68
GENERALISANE (UOPŠTENE) KOORDINATE. BROJ STEPENI SLOBODE MATERIJALNOG SISTEMA 68
VIRTUALNO (MOGUĆNO) POMJERANJE MATERIJALNOG SISTEMA 69

RAD SILA NA VIRTUALNIM POMJERANJIMA 70

GENERALISANE SILE 70

OSNOVNE JEDNAČINE DINAMIKE MATERIJALNIH SISTEMA 71

Opšta jednačina statike (Lagranžev princip virtualnih pomjeranja) 71

Opšta jednačina dinamike (Lagranž-Dalamberov princip) 72

Lagranževe jednačine druge vrste 72